VŠB – Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra aplikované matematiky

# Taylorův polynom a jeho aplikace

# Taylor polynomial and its application

2017 Jan Cenek

VŠB - Technická univerzita Ostrava
Fakulta elektrotechniky a informatiky
Katedra aplikované matematiky

# Zadání bakalářské práce

| | |
|---|---|
| Student: | **Jan Cenek** |
| Studijní program: | B2647 Informační a komunikační technologie |
| Studijní obor: | 1103R031 Výpočetní matematika |
| Téma: | Taylorův polynom a jeho aplikace<br>Taylor polynomial and its application |
| Jazyk vypracování: | čeština |

Zásady pro vypracování:

Hlavním cílem práce je přinést podrobný rozbor různých motivací vedoucích k zavedení Taylorova polynomu a multimediální ilustrace jeho chování ve vztahu k aproximované funkci. Součástí textu bude také popis některých základních technik, popřípadě aplikací využívajících Taylorovův polynom. Práce bude kromě názorných ilustrací obsahovat rovněž poznámky charakterizující problematiku z historického kontextu.

Seznam doporučené odborné literatury:

V. Jarník, Diferenciální počet I, Praha, Academia, 1974
V. Jarník, Diferenciální počet II, Praha, Academia, 1976
W. Rudin, Principles of mathematical analysis, McGraw-Hill, 1976

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí bakalářské práce: **Mgr. Bohumil Krajc, Ph.D.**

Datum zadání: 01.09.2016
Datum odevzdání: 28.04.2017

doc. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.
*vedoucí katedry*

prof. RNDr. Václav Snášel, CSc.
*děkan fakulty*

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně. Uvedl jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal.

V Ostravě 28. dubna 2017 ........................

Rád bych na tomto místě poděkoval Mgr. Bohumilovi Krajcovi,Ph.D., který mi s prací pomohl, protože bez něj by tato práce nevznikla.

**Abstrakt**

Po stručném historickém úvodu je práce zaměřena na Taylorův polynom, nejprve je rozebírána problematika Taylorova polynomu jedné reálné proměnné, včetně uvedení několika důležitých vět, definic, provedených důkazů a vyřešených příkladů. Poté je nastíněna problematika počítání s funkcemi o-malými. Následně jsou uvedeny aplikace Taylorova polynomu jedné reálné proměnné včetně jeho praktického využití. Nakonec je rozebírán Taylorův polynom více proměnných, a to i s uvedením několika příkladů a aplikací.



**Klíčová slova**: Taylorův polynom, o-symbolika, aplikace Taylorova polynomu



**Abstract**

After brief historical introduction this thesis focuses on Taylor polynomial. First, the problematic of Taylor polynomial in one real variable, including stating several important theorems, definitions, proof and solved examples is discussed. Then, the problematic with o-small functions is outlined. Then the applications of Taylor polynomial in one real variable with practical utilization are stated. Finally the Taylor polynomial in several variables with examples and applications is discussed.



**Key Words**: Taylor polynomial, o-notation, application of Taylor polynomial

## Obsah

## Seznam obrázků

## Použité symboly

| | |
|---|---|
| $\lceil P(x) \rceil_r$ | Oříznutí polynomu $P$ na stupeň nejvýše $r$ |
| $C^n(\Omega)$ | Spojitost derivací do $n$-tého řádu na oblasti $(\Omega)$ |
| $d^m f_c(h)$ | Diferenciál $m$-tého řádu funkce $f$ v bodě $h$ |
| $f^{(k)}(a)$ | $K$-tá derivace funkce $f$ v bodě $a$ |
| $f_x$ | Zjednodušený zápis pro parciální derivaci funkce $f$ podle proměnné $x$ |
| $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ | $K$ náleží do množiny nezáporných celých čísel |
| $o(f(x))$ | Funkce o malá |
| $P_a$ | Prstencové okolí bodu $a$ |
| $T_{n,f,a}(x)$ | Taylorův polynom $n$-tého stupně, funkce $f$, v bodě $a$ |
| $T_n$ | Standardní značení Taylorova polynomu |
| $U_a$ | Okolí bodu $a$ |

# 1. Úvod

Jednou z nejvyužívanějších metod pro lokální aproximaci funkce v okolí daného bodu je Taylorův polynom. Taylorův polynom je známý již několik století a využívá se pro zjednodušení mnoha úloh. Cílem této bakalářské práce je seznámení se s pojmem Taylorova polynomu a také s jeho možným využitím. Nejprve se budu blíže věnovat Taylorovu polynomu funkcí jedné proměnné s následným uvedením několika příkladů jeho využití, a to i včetně využití praktického. Poté se budu zabývat i Taylorovým polynomem dvou a více proměnných. Následně využiji Taylorův polynom funkce více proměnných k výpočtu několika příkladů. Bakalářská práce je doprovázena i grafickým zpracováním Taylorova polynomu, pro lepší porozumění a znázornění tohoto tématu. Obrázky byly vytvořeny v programu Maple16[1] a upraveny softwarem IPE[2]. Další grafické ilustrace jsou uvedeny v příloze.

[1]Maple® je registrovaná známka společnosti Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc. 2009
[2]IPE je sofware vytvořený matematikem Otfriedem Cheongem pod GNU licencí.(viz. [1])

## 2. Historické pozadí studia Taylorova polynomu

Pojmem Taylorova polynomu se v minulosti zabývalo mnoho matematiků i fyziků. Není příliš známo, že prvním, kdo se hlouběji věnoval tématu Taylorova polynomu, byl James Gregory. I když v jeho případě šlo spíše o využití Taylorova rozvoje pro určité cyklometrické funkce, například funkce arctg. Taylorovým polynomem se později také zabýval i Colin Maclaurin, tento matematik se však věnoval zejména speciálnímu případu Taylorova polynomu. A to konkrétně Taylorovu polynomu se středem v bodě nula. Avšak tím, kdo se nejvýznamněji zapsal do historie Taylorova polynomu byl Brook Taylor, podle něhož je tento polynom pojmenován. V té době se však tento polynom ještě příliš nevyužíval. Od té doby se Taylorovým polynomem zabývalo ještě mnoho dalších vědců, například Joseph-Louis Lagrange, který přišel na nové vyjádření zbytku při aproximaci v Taylorově polynomu. O Taylorův polynom se také zajímal i Isaac Newton a další. Při zpracování historické části byly použity zdroje [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10].

Obrázek 2.1. James Gregory

2.1. **James Gregory.** Narodil se roku 1638 v Drumoaku a zemřel roku 1675 v Edinburgu. Byl nejmladším ze tří dětí. Gregory si již během svých studií uvědomil, že ho matematika zajímá, a že mu přijde snadná. U matematiky však nezačal svou vědeckou dráhu, začal studovat optiku a konstrukci teleskopů. Jeho původním zaměřením byla astronomie. V roce 1663 také vydal svou knihu „Optica Promota“, ve které mimo jiné navrhl, jak zkonstruovat teleskop, který by byl lepší, než v té době využívané. Protože však postrádal potřebné technické dovednosti, odcestoval do Londýna, kde se snažil najít někoho, kdo by mu jeho teleskop sestavil. Jeho hledání schopného konstruktéra však nevedlo k požadovanému cíli. O jeho snahách se dozvěděl Robert Hooke, který jako první sestrojil Gregoriho teleskop asi o 10 let později. Gregory se však věnoval i matematice, a to zejména trigonometrii. Do roku 1668 publikoval další dvě práce, zejména první byla zásadní, a to z toho důvodu, že její kopii poslal Christiaanovi Huygensovi, od kterého chtěl znát jeho názor. Huygens mu však neodepsal a přitom roku 1668 publikoval kritickou recenzi na tuto Gregoriho publikaci. V ní vznesl několik námitek a mimo jiné také tvrdil, že byl on tím prvním, kdo dokázal některé z výsledků. Gregory byl z Huygensových komentářů frustrovaný, protože si je vyložil tak, že Huygens naznačuje, že mu výsledky ukradl. Tímto se dostali Christiaan Huygens s Jamesem Gregorym do rozepře, která však měla své nešťastné následky, a to zejména, že James ztratil chuť oznamovat veřejně své postupy a výsledky. O řadě Gregoriho výsledků se tak dozvídáme díky zjištěním, které přinesl Herbert Turnbull, který během roku 1930 prozkoumal Gregoriho práci v knihovně v St. Andrews. Nyní tedy víme, že přestože svoje výsledky nepublikoval, byl již během roku 1668 obeznámen s rozvoji trigonometrických funkcí v řady, jako například rozvoj funkce sinus nebo tangens. Také stanovil, že $\int \sec x \, \mathrm{d}x = \log(\sec x + \mathrm{tg}\ x)$, čímž vyřešil dlouho trvající problém s konstrukcí lodních stolů. Zabýval se také ještě řadou různých problémů, například objevem interpolační formule, integrací logaritmické funkce a řadou dalších souvisejících problémů. Gregory byl v roce 1668 zvolen členem Královské Společnosti, které předložil řadu prací na různá témata, jako například z astronomie nebo mechaniky. James Gregory byl jmenován profesorem univerzity St. Andrews ve Skotsku, kde také poznal svou ženu Mary Jamesonovou. V roce 1671 objevil Taylorovu větu, vzhledem k tomu, že se dověděl, že se Isaac Newton zabývá podobným problémem, rozhodl se svoje závěry nepublikovat před Newtonem, aby se s ním případně nedostal do konfliktu podobně jako s Huygensem. Jeho nejznámější práce ve spojení s Taylorovým polynomem je nyní nazývána jako Gregoriho rozvoj funkce arctg.

$$\mathrm{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

Během svého pobytu na univerzitě v St. Andrews také přišel s nápadem na postavení observatoře. Univerzita jeho nápad sice podpořila, ale zároveň mu sdělila, že si musí prostředky pro její financování získat sám. Po neúspěšné snaze o vybudování observatoře se rozhodl v roce 1674 přestěhovat do Edinburgu, kde začal vyučovat na tamní univerzitě. V Edinburgu se nadále věnoval matematice a astronomii, náhle zemřel téměř přesně po roce, kdy se do Edinburgu přestěhoval.

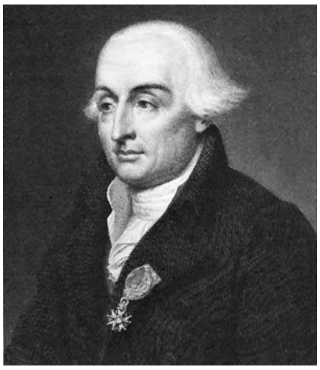
Obrázek 2.2. Colin Maclaurin

2.2. **Colin Maclaurin.** Narodil se 1. února 1698 v Kilmodanu a zemřel 14. června 1746 v Edinburgu. Byl nejmladším ze tří dětí a vyrůstal bez otce, který zemřel, když bylo Maclaurinovi šest týdnů. Od devíti let, po úmrtí jeho matky, byl spolu se svým bratrem Johnem, vychováván strýcem. V roce 1709, v pouhých jedenácti letech, se Maclaurin stal studentem univerzity v Glasgow. Na univerzitě se seznámil s Robertem Simsonem (znám díky tzv. Simsonově přímce), který tam byl profesorem matematiky. Ve čtrnácti letech dostal Maclaurin titul Master of Arts, ale aby ho získal, musel svoji práci obhájit na veřejném přezkoumání. Jeho práce byla však natolik komplikovaná, že tak pokročilé nápady byly známy pouze malému počtu matematiků. V devatenácti letech byl jmenován profesorem matematiky na univerzitě v Aberdeenu. V roce 1719 odcestoval do Londýna, kde kromě toho, že se stal členem Královské Společnosti, také setkal s Isaacem Newtonem. To, že byl profesorem, ovšem nijak Maclaurina neomezovalo. Když mu byla nabídnuta možnost doprovázet syny Lorda Polwartha, který byl diplomatem krále George

II., po Evropě, tak bez zaváhání odcestoval a ani se neobtěžoval získat povolení univerzity k tomuto výletu. Poté, co se Maclaurin vrátil, tak se začal ucházet o pozici profesora na univerzitě v Edinburgu, v čemž ho podpořil i Isaac Newton. Nakonec byl jmenován profesorem v roce 1725. Maclaurin se dále věnoval řadě různých témat, jako například vyšetřování extremálních úloh nebo eliptickým integrálům. Maclaurin si také všiml, jak použít speciální případ Taylorova polynomu v některých geometrických metodách antických Řeků. Na jeho počest se speciální případ rozvoje Taylorova polynomu se středem v bodě 0 nyní nazývá Maclaurinův polynom.

Obrázek 2.3. Brook Taylor

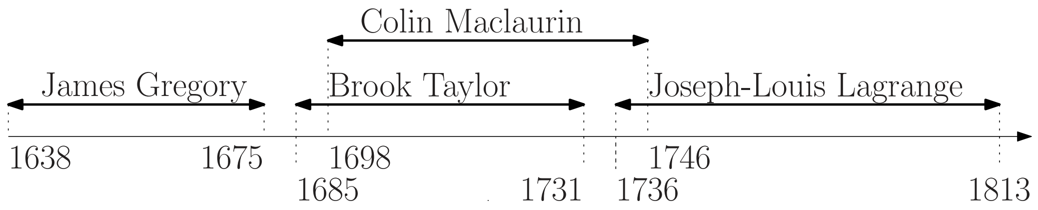
2.3. **Brook Taylor.** Narodil se 18. srpna 1685 v Edmontonu a zemřel 29. prosince 1731 v Londýně. Byl to matematik, jehož první významná publikace se týkala řešení problému zvaného „centrum oscilace". Ačkoli se tímto tématem zabýval již během svého studia v roce 1708, tak svoji práci publikoval až v květnu 1714. Toto zdržení v publikování vedlo k rozporu s Johannem Bernoullim. Díky Taylorově korespondenci s matematiky Johnem Machinem a Johnem Keillem byly zaznamenány Taylorovy názory na řadu matematických problémů. Roku 1712 napsal Machinovi svoje řešení problému, který se týkal Keplerova zákona o planetárním pohybu. Brook Taylor byl v roce 1714 zvolen tajemníkem Královské Společnosti a tuto pozici zastával po dobu čtyř let. Doba, během které byl tajemníkem, byla pro Taylora velmi produktivní, vydal dokonce dvě knihy. V roce 1715 vydal „Direct and Indirect Methods of Incrementation", kterým přidal do světa vyšší matematiky zcela nové odvětví, které se nazývá „kalkul konečných rozdílů". Během let 1712 až 1724 Taylor publikoval třináct článků na mnoho různých témat. Například v roce 1715 motivoval vznik experimentu, který vedl k objevení zákona o magnetické přitažlivosti nebo v roce 1717 vylepšil metodu pro aproximaci kořenů rovnice tím, že navrhl novou metodu pro výpočet logaritmů. V osobním životě však takové štěstí neměl, nejprve se rozhádal s otcem, který nesouhlasil s jeho manželstvím a v roce 1723 zemřela Taylorova žena i dítě při porodu. Po této události se usmířil s otcem, který jeho druhé manželství v roce 1725 už schválil. Ale i jeho druhá žena zemřela při porodu, tentokrát však dítě přežilo. Taylor se věnoval i několika speciálním problémům, včetně vibrace struny, u které se však nesnažil odvodit rovnici pohybu, ale zkoumal kvalitativní vlastnosti vibrující struny. Dále se zabýval určením zdroje oscilace nebo například cesty slunečního záření ohnutého v atmosféře. Nejvíce je však znám díky Taylorově větě (která byla součástí Direct and Indirect Methods of Incrementation). Důležitost Taylorova polynomu však začala razantně narůstat až po roce 1772, kdy francouzský matematik Joseph-Louis Lagrange prohlásil Taylorovu větu za základní princip diferenciálního počtu.



Obrázek 2.4. Joseph-Louis Lagrange

2.4. **Joseph-Louis Lagrange.** Narodil se 25. ledna 1736 v Turíně a zemřel 10. dubna 1813 v Paříži. Lagrange je obvykle považován za francouzského matematika, ale někteří ho považují za italského matematika, což je pochopitelné, protože se narodil v Turíně. Jelikož měla Lagrangova rodina francouzské kořeny z otcovy strany, tak se Lagrange rád podepisoval svou francouzskou podobou jména. Zpočátku Lagrange matematika vůbec nezajímala, studoval totiž práva na univerzitě v Turíně a jeho nejoblíbenějším předmětem byla latina. Lagrangeuv zájem o matematiku začal, až si přečetl práci o využití algebry v optice. Lagrange také prohlásil, že kdyby byl bohatý, tak by se velmi pravděpodobně matematice nevěnoval. Zajímavé také je, že poté, co publikoval svou první práci v italštině, tak se dověděl, že se stejné výsledky objevily také v korespondenci mezi Johannem Bernoullim a Leibnitzem. Toto zjištění Lagrange velmi znepokojilo, protože se obával, že bude označen za podvodníka, který jen kopíruje výsledky jiných. Poněkud krušný začátek však Lagrange neodradil od jeho snahy o prosazení v matematice. Poté se začal věnovat tautochronní křivce. Do konce roku 1754 učinil několik důležitých zjištění, která vedla k objevení variačního počtu. V roce 1755 poslal svoje výsledky Eulerovi, který jimi byl ohromen, a to přesto, že v té době bylo Lagrangeovi pouze devatenáct let. A stejného roku byl Lagrange také jmenován profesorem matematiky na Královské dělostřelecké škole v Turíně. V roce 1757 byl Lagrange zakládajícím členem vědecké společnosti v Turíně. Jednou z hlavních rolí této nové společnosti bylo vydání vědeckého časopisu „Mélanges de Turin“, kterého byl Lagrange hlavním přispěvatelem. Ve třetím vydávání se Lagrange věnoval integraci diferenciálních rovnic a vydal několik aplikací z různých oblastí jako například na mechaniku tekutin (kde představil Lagrangeovu funkci). V roce 1766 přijal Lagrange nabídku na pozici ředitele ústavu matematiky Berlínské akademie. Rok po příjezdu do Berlína se Lagrange oženil se svou sestřenicí. Jeho práce v Berlíně pokrývala několik oblastí, přes astronomii, mechaniku, dynamiku až třeba po stabilitu slunečního systému. V roce 1770 také pracoval na teorii čísel dokazující, že každé přirozené číslo lze zapsat jako součet čtyř druhých mocnin přirozených čísel. V roce 1771 Lagrange dokázal Wilsonovu větu jako důležitou prvočíselnou charakteristiku. V roce 1787 opustil Berlín, aby se stal členem Akademie věd v Paříži, kde už zůstal až do konce svoji kariéry. Lagrange na rozdíl od jiných osobností přežil Velkou francouzskou revoluci. V roce 1790 se podílel na vývoji metrického systému a zasazoval se o desítkovou soustavu. V roce 1794 se stal vedoucím profesorem matematiky na vysoké škole „École Centrale des Travaux Publics“. 3. dubna 1813 byl oceněn řádem „Grand Croix of the Ordre Impérial de la Réunion“, a týden na to zemřel.

Pro lepší představu si nyní znázorněme časová období, kdy jednotliví matematici žili.




Obrázek 2.5. Časová osa

# 3. Taylorův vzorec pro funkce jedné proměnné

Nebude-li řečeno jinak, budeme v této kapitole uvažovat pod pojmem funkce pouze funkce jedné reálné proměnné. Hlavním zdrojem, ze kterého jsme čerpali při zpracování této kapitoly je práce [2], použili jsme také [12], [16] .

3.1. **Aproximace funkcí polynomy.** Polynomy jsou jedny z mála funkcí, u kterých ve zvoleném bodě umíme relativně snadno spočítat jejich hodnoty. Nyní ukážeme, jak lze za pomoci polynomů některé funkce dobře aproximovat. Uvažujme tedy polynomy, které budou reálnými funkcemi, konkrétně tedy funkce $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ve tvaru

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \text{ kde } a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Aby nám tento zápis (3.1) vyhovoval i pro hodnotu $x = 0$, tak položíme $0^0 = 1$. Je-li $a_n \neq 0$, budeme $n$ nazývat stupněm polynomu $p$. V momentě, kdy budou všechny koeficienty $a_i$ nulové, budeme nazývat $p$ nulovým polynomem a jeho stupeň budeme definovat jako -1. V důsledku, budeme-li hovořit o polynomech, jejichž stupeň bude nanejvýš $n$, budou tyto polynomy zahrnovat i polynom nulový.

Koeficienty $a_0, a_1, \dots, a_n$ polynomu $p$ jsou jednoznačně dány, což vyplývá ze základní věty algebry. Podle binomické věty můžeme napsat, že pro každé $a \in \mathbb{R}$ je

$$x^k = [(x-a)+a]^k = \sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} (x-a)^i a^{k-i}, \tag{3.2}$$

a právě proto můžeme pro libovolné, ale pevně zvolené $a \in \mathbb{R}$, vyjádřit polynom $p$ také ve tvaru

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x-a)^k, \text{ kde } b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

Pro polynom $p$, který je dán vztahem (3.1) a bod $a \in \mathbb{R}$ lze koeficienty $b_0, b_1, \dots, b_n$ jednoznačně určit následujícím způsobem.

Pokud víme, že

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} b_k (x-a)^k, \text{ kde } a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \text{ a } b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R},$$

tak derivováním $p$ v bodě $a$ dostaneme

$$\begin{aligned} p(a) &= b_0 \\ p'(a) &= 1! b_1 \\ &\vdots \\ p^{(n)}(a) &= n! b_n \end{aligned} \tag{3.4}$$

Navíc z vyjádření (3.3) vyplývá, že koeficient $b_n$ bude nenulový, právě pokud stupeň polynomu $p$ bude $n$.

**Věta 1.** *Nechť reálná funkce $f$ má v bodě $a \in \mathbb{R}$ konečnou $n$-tou derivaci. Potom existuje právě jeden polynom $T_n$ stupně nejvýše $n$ takový, že*

$$T_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \text{ pro každé } k = 0, 1, \ldots, n.$$

*Tento polynom má tvar*

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \tag{3.5}$$

**Definice 1.** Polynom (3.5) nazýváme Taylorovým polynomem $n$-tého řádu funkce $f$ se středem v bodě $a$. Pokud je $a = 0$ hovoříme o Maclaurinově polynomu.

*Důkaz.* Budeme uvažovat polynom $p$, jehož stupeň je nanejvýš $n$, a který je ve tvaru (3.3). Pak po jeho $k$-násobném derivováním a následném dosazením bodu $a$ dostaneme $p^{(k)}(a) = k!b_k$, pro $k = 0, 1, \ldots, n$. Protože pro polynom, který hledáme platí, že $k$-tá derivace v bodě $a$ je rovna $k$-té derivaci funkce $f$ v bodě $a$, pro všechna $k$ =0,1,$\ldots, n$, tak nutně musí platit, že

$$k!b_k = f^{(k)}(a) \text{ z toho plyne, že } b_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \text{ pro každé } k = 0, 1, \ldots, n.$$

Koeficienty $b_k$ jsou tedy jednoznačně určeny, a právě proto bude existovat pouze jediný polynom, který splňuje námi hledané vlastnosti. $\square$

Pokud nebude z kontextu jasné, v jakém bodě, a ke které funkci budeme Taylorův polynom konstruovat, budeme používat místo stručného zápisu $T_n(x)$ více konkrétní označení $T_{n,f,a}(x)$.

Nyní pro ilustraci uveďme Maclaurinovy polynomy $n$-tého řádu některých vybraných funkcí se středem v bodě $a = 0$:

- Mějme dánu funkci $f(x) = \mathrm{e}^x$. Protože víme, že platí $f^{(k)}(x) = \mathrm{e}^x$, pak platí $f^{(k)}(0) = 1$, pro každé $k = 0, 1, \ldots, n$, takže

$$f(x) = \mathrm{e}^x \quad \Rightarrow \quad T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k \tag{3.6}$$

- Mějme dánu funkci $f(x) = \ln(1+x)$. Víme, že platí $f(0) = 0$, a protože pro přirozené $k$ je $k$-tá derivace $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!(1+x)^{-k}$, získáme $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$. Tedy

$$f(x) = \ln(1+x) \quad \Rightarrow \quad T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k. \tag{3.7}$$

- Mějme dánu funkci $f(x) = \cos x$. Nechť $k = 0, 1, \ldots, n$. Protože víme, že platí $f^{(2k)}(x) = (-1)^k \cos x$ a $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \sin x$, tak dosazením bodu $a = 0$ získáme $f^{(2k)}(0) = (-1)^k$ a $f^{(2k+1)}(0) = 0$. Proto můžeme uvést, že

$$f(x) = \cos x \quad \Rightarrow \quad T_{2n}(x) = T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} \tag{3.8}$$

- Mějme dánu funkci $f(x) = \sin x$. Nechť $k = 0, 1, \ldots, n$. Protože víme, že platí $f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x$ a $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos x$, tak dosazením bodu $a = 0$ získáme $f^{(2k)}(0) = 0$

a $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$. Proto můžeme uvést, že

$$f(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad T_{2n}(x) = T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \tag{3.9}$$

- Mějme dánu funkci $f(x) = (1+x)^r$, kde $r \in \mathbb{R}$. Víme, že její $k-$tá derivace pro každé $k = 0, 1, \ldots, n$, má tvar $f^{(k)}(x) = r \cdot (r-1) \cdot \ldots \cdot (r-k+1) \cdot (1+x)^{r-k}$. Po dosazení bodu 0 obdržíme $f^{(k)}(x) = r \cdot (r-1) \cdot \cdots \cdot (r-k+1)$. Výraz $\binom{r}{k}$ budeme definovat jako

$$\binom{r}{k} = \begin{cases} 1 & \text{když } k = 0, \\ \frac{r \cdot (r-1) \cdot \cdots \cdot (r-k+1)}{k!} & \text{když } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Potom již můžeme uvést, že

$$f(x) = (1+x)^r \quad \Rightarrow \quad T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k} x^k. \tag{3.10}$$

3.2. **Základní terminologie a vlastnosti.** Základní motivací pro zavedení Taylorova polynomu bylo to, že jsme chtěli nějakou funkci aproximovat polynomem. Taylorův polynom tedy slouží k tomu, abychom mohli jistou funkční závislost aproximovat závislostí polynomickou. Tím bychom závislost podstatně zjednodušili. Mějme však na paměti, že polynomická aproximace může být, jak velmi dobrá, tak i špatná natolik, že bychom se jejím použitím nedostali k rozumným výsledkům. A právě z tohoto důvodu nás také bude zajímat, jak velké chyby se dopustíme, když místo hodnoty funkce v bodě $x$ vezmeme hodnotu Taylorova polynomu ve stejném bodě.

*Poznámka* 1. Nechť $T_n$ označuje Taylorův polynom funkce $f$ se středem v bodě $a$. Pak rozdíl

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) \tag{3.11}$$

nazveme chybou Taylorovy aproximace hodnoty $f(x)$. Vztahu

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x) \tag{3.12}$$

budeme dále říkat Taylorův vzorec.

**Věta 2.** *Nechť pro funkci $f$, bod $a$ a přirozené číslo $n$ platí, že v bodě $a$ existuje konečná $n$-tá derivace funkce $f$. Pak pro zbytek v Taylorově vzorci (3.12) platí*

$$\lim_{x \to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0. \tag{3.13}$$

*Důkaz.* Z definice Taylorova polynomu plyne, že

$$R_n(a) = R_n'(a) = R_n''(a) = \cdots = R_n^{(n-1)}(a) = R_n^{(n)}(a) = 0. \tag{3.14}$$

Poté z definice $n$-té derivace a z předpokladu, že v bodě $a$ existuje konečná $n$-tá derivace funkce $f$ plyne

$$0 = R_n^{(n)}(a) = \lim_{x \to a} \frac{R_n^{(n-1)}(x) - R_n^{(n-1)}(a)}{(x-a)} = \lim_{x \to a} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{(x-a)} = \lim_{x \to a} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)}.$$

Protože existuje poslední napsaná limita a platí, že v bodě $a$ existuje konečná $n$-tá derivace funkce $f$, můžeme, s přihlédnutím k (3.14) pro výpočet (3.13) použít $(n-1)$-krát l'Hospitalovo pravidlo. Po použití l'Hospitalova pravidla tedy dostaneme

$$\lim_{x\to a}\frac{R_n(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{R_n'(x)}{n(x-a)^{n-1}}=...=\lim_{x\to a}\frac{R_n^{(n-2)}(x)}{(n-1)!(x-a)^2}=\lim_{x\to a}\frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)}=0,$$

čímž je věta dokázána. □

**Definice 2.** Předpokládejme, že platí předpoklady předchozí věty a označme

$$\omega_n(x)=\begin{cases}\frac{R_n(x)}{(x-a)^n} & \text{pro } x\neq a,\\ 0 & \text{pro } x=a.\end{cases}$$

Pak je možné zapsat Taylorův vzorec v následujícím tvaru

$$f(x)=T_n(x)+\omega_n(x).(x-a)^n,\text{ kde }\lim_{x\to a}\omega_n(x)=0,$$

kde se $\omega_n(x).(x-a)^n$ nazývá Peanův tvar zbytku.

Při použití Taylorova polynomu nás samozřejmě zajímá odhad chyby, jaké se dopustíme pro konkrétní $x$. Chybu v Taylorově vzorci můžeme zapsat několika způsoby. Proto uveďme Taylorovu větu.

**Věta 3.** *Uvažujme Taylorův vzorec $f(x)=T_n(x)+R_n(x)$. Nechť existuje okolí $U_a$ bodu $a$ takové, že funkce $f$ v něm má konečnou $(n+1)$-ní derivaci. Pak pro každé $x\in U_a$ existuje číslo $\xi$ ležící v intervalu s krajními body $a, x$ takové, že Taylorův zbytek lze psát ve tvaru*

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

*Důkaz.* Zvolme si bod $x\in P_a$, a označme si $I$ jako uzavřený interval, který bude ohraničen krajními body $a$ a $x$ a navíc si definujme funkci

$$F(z)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(z)}{k!}(x-z)^k.$$

Pak pro funkci, která je takto definovaná, platí

$$\begin{aligned}F'(z)=&f'(z)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k+1)}(z)}{k!}(x-z)^k-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(z)}{(k-1)!}(x-z)^{k-1}=\\ =&f'(z)+\frac{f^{(2)}(z)}{1}(x-z)-\frac{f^{(1)}(z)}{1}(x-z)^0+\ldots-\frac{f^{(n)}(z)}{(n-1)!}(x-z)^{n-1}=\\ =&\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n.\end{aligned}\tag{3.15}$$

Navíc

$$F(x)=f(x)\text{ a }F(a)=T_n(x)\tag{3.16}$$

Když budeme dále uvažovat funkci $\tau$, která je spojitá na intervalu $I$ a má uvnitř tohoto intervalu konečnou nenulovou derivaci, tak budou splněny předpoklady pro Cauchyovu větu o přírůstku funkce. Proto bude existovat bod $\xi$, který bude ležet uvnitř intervalu $I$, a pro který bude platit

$$\frac{F(x)-F(a)}{\tau(x)-\tau(a)}=\frac{F'(\xi)}{\tau'(\xi)}.$$

Po dosazení z rovností (3.15) a (3.16) dostaneme

$$\frac{R_n(x)}{\tau(x)-\tau(a)} = \frac{f(x)-T_n(x)}{\tau(x)-\tau(a)} = \frac{F(x)-F(a)}{\tau(x)-\tau(a)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n \frac{1}{\tau'(\xi)}. \tag{3.17}$$

K dokončení důkazu zvolme $\tau(z) = (x-z)^{n+1}$ :

$$\frac{R_n(x)}{(x-a)^{n+1}} = -\frac{R_n(x)}{(x-x)^{n+1}-(x-a)^{n+1}} = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n \frac{1}{-(n+1)(x-\xi)^n} =$$
$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

□

*Poznámka.* Uvedené větě se říká Taylorova věta. Tvaru zbytku

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

odvozenému v této věte říkáme Lagrangeův.

*Poznámka.* Můžeme si všimnout, že pokud bychom v posledním kroku důkazu předchozí věty místo funkce $\tau(z) = (x-z)^{n+1}$ zvolili $\tau(z) = z$, tak bychom po dosazení do (3.17) získáme

$$\frac{R_n(x)}{(x-a)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n,$$

odkud už snadno získáme další tvar zbytku, a to tzv. Cauchyův tvar. Cauchyův tvar zbytku má tedy tvar.

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-a).$$

To, který ze zbytků je pro počítání výhodnější, závisí na použití konkrétní funkce $f$.

*Poznámka* 2. Ukazuje se, že v jistém smyslu je Taylorův polynom nejlepší aproximací funkce $f$.

**Věta 4.** *( O nejlepší aproximaci) Nechť pro funkci $f$, bod $a$ a přirozené číslo $n$ platí, že v bodě $a$ existuje konečná $n$-tá derivace funkce $f$. Nechť $T_n$ je Taylorův polynom funkce $f$ se středem v bodě $a$. Nechť $Q$ je polynom stupně nejvýše $n$, různý od $T_n$. Pak existuje takové prstencové okolí $P_a$, že*

$$|f(x)-T_n(x)| < |f(x)-Q(x)| \text{ pro každé } x \in P_a.$$

*Důkaz.* Budeme uvažovat polynomy $T_n$ a $Q$ ve tvaru

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k \text{ a } Q(x) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k (x-a)^k.$$

Protože jsou oba polynomy různé, tak bude platit

$$i = \min\{k \mid \alpha_k \neq \beta_k\} \leq n.$$

Využijme nyní vyjádření funkce $f$ pomocí Peanova zbytku tedy $f(x) = T_n(x) + \omega_n(x).(x-a)^n$. Pro $x \neq a$ tak dostaneme

$$\left|\frac{f(x)-Q(x)}{(x-a)^i}\right| = \left|\frac{T_n(x)+\omega_n(x)(x-a)^n - Q(x)}{(x-a)^i}\right| = \left|\frac{\sum\limits_{k=i}^{n}(\alpha_k-\beta_k)(x-a)^k + \omega_n(x)(x-a)^n}{(x-a)^i}\right| =$$

$$= \left|(\alpha_i-\beta_i) + \sum_{i=k+1}^{n}(\alpha_k-\beta_k)(x-a)^{k-i} + \omega_n(x).(x-a)^{n-i}\right| \text{kde } |\alpha_i-\beta_i| > 0.$$

Nyní provedeme limitní přechod:

$$\lim_{x\to a}\left|\frac{f(x)-Q(x)}{(x-a)^i}\right| = |\alpha_i-\beta_i| > 0,$$

zatímco

$$\lim_{x\to a}\left|\frac{f(x)-T_n(x)}{(x-a)^i}\right| = 0.$$

Odtud vyplývá, že existuje prstencové okolí $P_a$ takové, že

$$\left|\frac{f(x)-Q(x)}{(x-a)^i}\right| > \left|\frac{f(x)-T_n(x)}{(x-a)^i}\right| \text{ pro každé } x \in P_a.$$

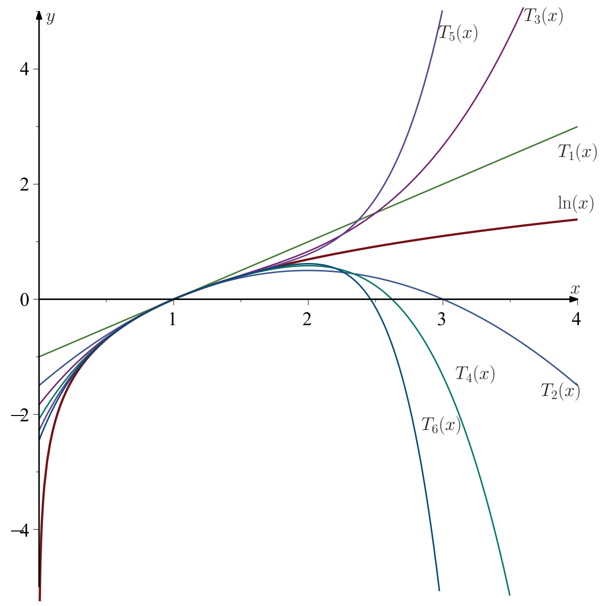
Po přenásobení poslední uvedené nerovnosti kladnou hodnotou $|(x-a)^i|$, už dostaneme $|f(x) - Q(x)| > |f(x) - T_n(x)|$, čímž je tvrzení dokázáno. □

**Důsledek.** *Nechť $T_{n-1}$ a $T_n$ jsou příslušné Taylorovy polynomy funkce $f$ se středem v bodě $a$. Pokud $T_{n-1} \neq T_n$, pak pro jisté prstencové okolí $P_a$ platí nerovnost*

$$|T_n(x) - f(x)| < |T_{n-1}(x) - f(x)| \textit{ pro každé } x \in P_a.$$

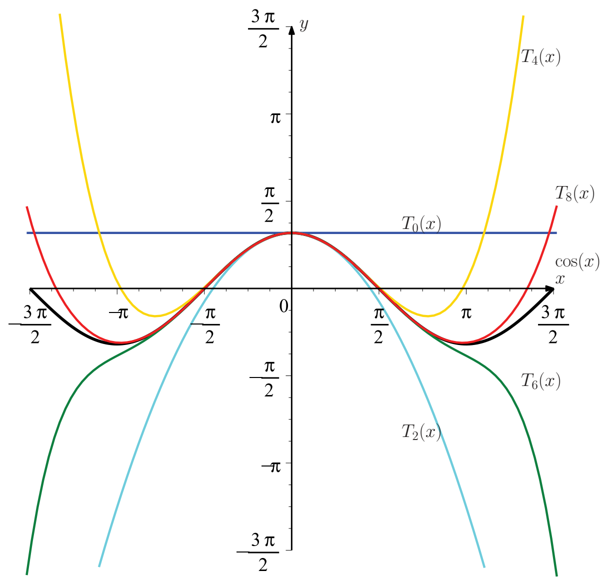
*Poznámka* 3. Lze tedy říci, že obvykle s rostoucím řádem dochází k lepší aproximaci funkce $f$.

Graficky si můžeme tento důsledek znázornit na funkci $f(x) = \ln(x)$ se středem v bodě 1 pomocí obrázku (3.1)




Obrázek 3.1. Funkce $\ln(x)$ a její Taylorovy polynomy.

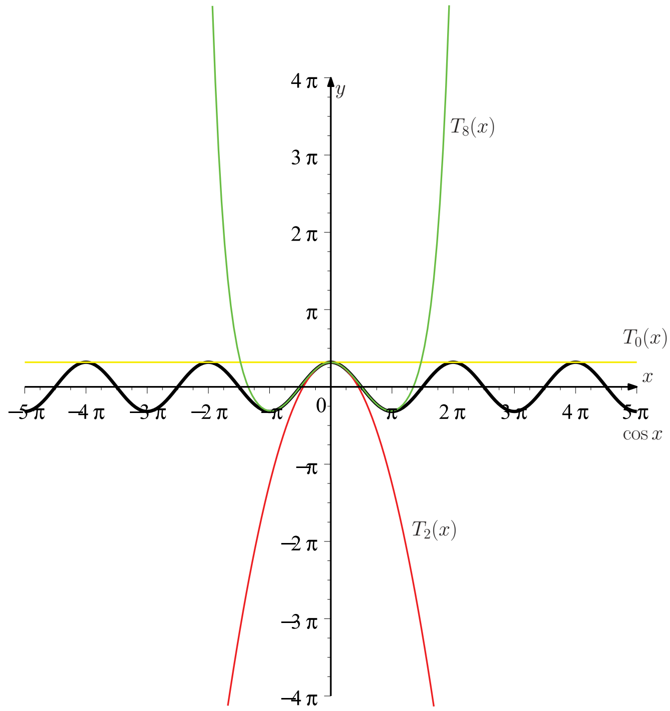
Vybráním nevhodné funkce však můžeme dojít k nesprávnému obecnému závěru a to, že každý následující Taylorův polynom nám bude funkci lépe aproximovat na větším okolí bodu. Což samozřejmě pravda není. Znázorněme si proto následující funkci $f(x) = \cos x$ (viz. obr. 3.2).




Obrázek 3.2. Funkce $\cos(x)$ a její Taylorovy polynomy

Z obrázku vidíme, že každý následující Taylorův polynom nám funkci přesněji aproximuje na větším okolí, tato situace však neplatí obecně pro každou funkci, kterou Taylorovým polynomem nahradíme.

Úsudek však může být ovlivněn také zobrazeným intervalem, na kterém aproximaci uvažujeme . Mohli bychom si všimnout, že pokud bychom si vzali například bod $-4\pi$, tak v něm je Taylorův polynom $T_8$ horší aporximací , než polynom $T_2$. Polynom $T_8$ totiž půjde kdo nekonečna rychleji než polynom $T_2$(viz. obr. 3.3).




Obrázek 3.3. Funkce $\cos(x)$ s Taylorovými polynomy na větším intervalu

**Věta 5.** *Nechť pro funkci $f$, bod $a$ a přirozené číslo $n$ platí, že v bodě $a$ existuje konečná $n$-tá derivace funkce $f$. Pak existuje jediný polynom $p(x)$ stupně, který je menší nebo roven $n$ takový, že $f(x)$ jde napsat jako*

(3.18) $$f(x) = p(x) + (x-a)^n \omega_n(x), \text{ kde } \lim_{x\to a} \omega_n(x) = 0.$$

*Důkaz.* Budeme postupovat podobně jako při důkaze věty 4. Důkaz provedem sporem. Nechť existují dva různé polynomy $P$ a $Q$ stupně nejvýše $n$, pro které platí

$$f(x) = P(x) + (x-a)^n \omega_n(x), \text{ kde } \lim_{x\to a} \omega_n(x) = 0,$$

$$f(x) = Q(x) + (x-a)^n \tilde{\omega}_n(x), \text{ kde } \lim_{x\to a} \tilde{\omega}_n(x) = 0.$$

Nechť polynomy $P$ a $Q$ jsou zapsaány v následujících tvarech

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k \text{ a } Q(x) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k (x-a)^k.$$

Protože jsou oba polynomy různé, tak bude platit

$$i = \min\{k \mid \alpha_k \neq \beta_k\} \leq n.$$

Využijme nyní vyjádření funkce $f$ pomocí (3.18). Pro $x \neq a$ tak dostaneme

$$\left|\frac{f(x)-Q(x)}{(x-a)^i}\right| = \left|\frac{P(x)+\omega_n(x)(x-a)^n - Q(x)}{(x-a)^i}\right| = \left|\frac{\sum\limits_{k=i}^{n}(\alpha_k-\beta_k)(x-a)^k + \omega_n(x)(x-a)^n}{(x-a)^i}\right| =$$

$$= \left|(\alpha_i-\beta_i) + \sum_{i=k+1}^{n}(\alpha_k-\beta_k)(x-a)^{k-i} + \omega_n(x).(x-a)^{n-i}\right| \text{kde } |\alpha_i-\beta_i|>0.$$

Nyní provedeme limitní přechod:

$$\lim_{x\to a}\left|\frac{f(x)-Q(x)}{(x-a)^i}\right| = |\alpha_i-\beta_i|>0,$$

zatímco

$$\lim_{x\to a}\left|\frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^i}\right| = 0.$$

Odtud vyplývá, že existuje prstencové okolí $P_a$ takové, že

$$\left|\frac{f(x)-Q(x)}{(x-a)^i}\right| > \left|\frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^i}\right| \quad \text{pro každé } x\in P_a.$$

Po přenásobení poslední uvedené nerovnosti kladnou hodnotou $|(x-a)^i|$, už dostaneme $|f(x)-Q(x)|>|f(x)-P(x)|$.

Analogicky se ukáže nerovnost $|f(x)-P(x)|>|f(x)-Q(x)|$, platná v nějakém $\tilde{P}_a$. Na neprázdném průniku $P_a\cap\tilde{P}_a$ tedy dojdeme ke sporu $|f(x)-P(x)|>|f(x)-P(x)|$, a tak je nutně $P=Q$. □

### 3.3. **Příklady určování Taylorova polynomu funkce jedné proměnné.**

**Příklad 1.** Najděme Maclaurinův polynom čtvrtého řádu pro funkci $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$.

Nejprve si musíme spočítat derivace až do čtvrtého řádu:

$$\begin{aligned}
f(x) =& \mathrm{e}^{-x^2}\\
f'(x) =& \mathrm{e}^{-x^2}\cdot(-2x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}\\
f''(x) =& \mathrm{e}^{-x^2}\cdot(-2x)^2+\mathrm{e}^{-x^2}\cdot(-2) = \mathrm{e}^{-x^2}\cdot(4x^2-2)\\
f'''(x) =& \mathrm{e}^{-x^2}\cdot(-2x)(4x^2-2)+\mathrm{e}^{-x^2}\cdot(8x) = \mathrm{e}^{-x^2}\cdot(12x-8x^3)\\
f^{(4)}(x) =& \mathrm{e}^{-x^2}\cdot(-2x)(12x-8x^3)+\mathrm{e}^{-x^2}\cdot(12-24x^2) = \mathrm{e}^{-x^2}\cdot(16x^4-48x^2+12)
\end{aligned}$$

Nyní jsme připraveni si vypočítat funkční hodnoty těchto derivací v bodě $a=0$:

$$\begin{aligned}
f(0) &= \mathrm{e}^0 = 1\\
f'(0) &= -2\cdot 0\cdot \mathrm{e}^{-0^2} = 0\\
f''(0) &= \mathrm{e}^{-0^2}\cdot(4\cdot 0^2-2) = -2\\
f'''(0) &= \mathrm{e}^{-0^2}\cdot(12\cdot 0-8\cdot 0^3) = 0\\
f^{(4)}(0) &= \mathrm{e}^{-0^2}\cdot(16\cdot 0^4-48\cdot 0^2+12) = 12
\end{aligned}$$

Protože víme, že Taylorův polynom čtvrtého řádu bude ve tvaru

$$T_4(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \frac{f^{(4)}(x)}{4!}(x-a)^4,$$

tak po dosazení vypočtených hodnot dostaneme:

$$\begin{aligned} T_4(x) =& 1 + \frac{0}{1}(x-0) + \frac{-2}{2}(x-0)^2 + \frac{0}{6}(x-0)^3 + \frac{12}{24}(x-0)^4 \\ T_4(x) =& 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 \end{aligned}$$

**Příklad 2.** Ukážeme, že Maclarinův polynom libovolného řádu funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dané předpisem

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0, \end{cases}$$

je nulový.

Odtud pak plyne, že systém všech Taylorových polynomů obecně neurčuje výchozí funkci jednoznačně. Nejprve provedeme několik pomocných výpočtů.

I.

Přistoupíme ke hledání derivací funkce $f$. Pro lepší přehlednost zápisu si označme $y = f(x)$ a předpokládejme, že $x \neq 0$. Podobně budeme označovat $y' = f'(x)$, $y'' = f''(x)$ a tak dále. Zřejmě platí:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{2!}{x^3} \cdot y \\ y'' &= \frac{3!}{x^4} \cdot y + \frac{2!}{x^3} \cdot y' \\ y''' &= \frac{4!}{x^5} \cdot y - 2 \cdot \frac{3!}{x^4} \cdot y' + \frac{2!}{x^3} \cdot y'' \\ y^{(4)} &= \frac{5!}{x^6} \cdot y + 3 \cdot \frac{4!}{x^5} \cdot y' - 3 \cdot \frac{3!}{x^4} \cdot y'' + \frac{2!}{x^3} \cdot y'''. \end{aligned}$$

To nás vede k hypotéze, že pro každé $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$:

$$y^{(l+1)} = \sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} \frac{(l+2-j)!}{x^{l+3-j}} \cdot y^{(j)} \cdot (-1)^{l-j}. \tag{3.19}$$

Dokažme si tuto hypotézu pomocí matematické indukce.

Nyní si dokážeme tvrzení (3.19).

Nejprve zkontrolujeme, zda tvrzení platí pro $l = 0$. Již víme, že máme dospět ke vztahu:

$$y' = \frac{2!}{x^3} \cdot y.$$

A skutečně:

$$y' = \sum_{j=0}^{0} \binom{0}{0} \frac{(0+2-0)!}{x^{0+3-0}} \cdot y^{(0)} \cdot (-1)^{0-0} = \frac{2!}{x^3} \cdot y. \tag{3.20}$$

Pro $l = 0$ tvrzení platí.

Ukažme, že pokud tvrzení platí pro $l = n$, pak platí i pro $l = n+1$. Máme dokázat, že ze vztahu

$$y^{(n+1)} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{(n+2-j)!}{x^{n+3-j}} \cdot y^{(j)} \cdot (-1)^{n-j} \tag{3.21}$$

plyne:

$$y^{(n+2)} = \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} \frac{(n+3-j)!}{x^{n+4-j}} \cdot y^{(j)} \cdot (-1)^{n+1-j}.$$

Derivací vztahu (3.21), využitím identity $\binom{n}{m} + \binom{n}{m-1} = \binom{n+1}{m}$ a několika technickými manipulacemi se sumačními vzorci postupně obdržíme:

$$\begin{aligned}
y^{(n+2)} =& \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{(n+3-j)!}{x^{n+4-j}} y^{(j)} (-1)^{n-j}(-1) + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{(n+2-j)!}{x^{n+3-j}} y^{(j+1)} (-1)^{n-j} = \\
=& \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{(n+3-j)!}{x^{n+4-j}} y^{(j)} (-1)^{n-j}(-1) + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} \frac{(n+3-k)!}{x^{n+4-k}} y^{(k)} (-1)^{n-k}(-1) = \\
=& \binom{n}{0} \frac{(n+3)!}{x^{n+4}} y^{(0)} (-1)^{n}(-1) + \sum_{m=1}^{n} \left( \binom{n}{m} + \binom{n}{m-1} \right) \frac{(n+3-m)!}{x^{n+4-m}} y^{(m)} (-1)^{n-m}(-1) + \\
&+ \binom{n}{n} \frac{2!}{x^3} y^{(n+1)} (-1)^{1}(-1) = \\
=& \binom{n+1}{0} \frac{(n+3)!}{x^{n+4}} y^{(0)} (-1)^{n+1} + \sum_{m=1}^{n} \left( \binom{n+1}{m} \right) \frac{(n+3-m)!}{x^{n+4-m}} y^{(m)} (-1)^{n-m}(-1) + \\
&+ \binom{n+1}{n+1} \frac{2!}{x^3} y^{(n+1)} (-1)^{0} = \sum_{m=0}^{n+1} \binom{n+1}{m} \frac{(n+3-m)!}{x^{n+4-m}} \cdot y^{(m)} \cdot (-1)^{n+1-m}.
\end{aligned}$$

Z toho už vidíme, že tvrzení platí i pro $l = n+1$, čímž je vzorec (3.19) dokázán.

Přepišme ještě získaný vztah (3.19) ve standartním značení. Pro naší funkci $f$ a libovolné $x \neq 0$ platí:

$$f^{(l+1)}(x) = \sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} \frac{(l+2-j)!}{x^{l+3-j}} \cdot f^{(j)}(x) \cdot (-1)^{l-j}. \tag{3.22}$$

II.

Dále budeme potřebovat rovnost

$$\forall k \in \mathbb{N} : \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^k} f(x) = 0. \tag{3.23}$$

Vypočtěme nejprve limitu zprava:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^k} &\overset{(*)}{=} \lim_{y \to +\infty} \frac{y^{\frac{k}{2}}}{e^y} = \sqrt{\lim_{y \to +\infty} \frac{y^k}{e^y} \cdot \lim_{y \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{e^y}}} \overset{(**)}{=} \sqrt{\lim_{y \to +\infty} \frac{k!}{e^y}} \cdot \sqrt{\lim_{y \to +\infty} \frac{1}{e^y}} = \\
&= \sqrt{\frac{k!}{+\infty}} \cdot \sqrt{\frac{1}{+\infty}} = 0 \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

($*$) Použili jsme větu o limitě složené funkce s volbou $y = \frac{1}{x^2}$.

($**$) Aplikovali jsme $k$-krát l'Hospitalovo pravidlo .

Získaný výsledek nyní použijeme pro výpočet limity zleva:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}}{x^k} = (-1)^k \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}}{x^k} = (-1)^k \cdot 0 = 0.$$

Protože obě limity jsou nulové, vztah (3.23) platí.

III.

Zbývá dokázat, podle principu matematické indukce, že pro každé $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ platí:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^k} f^{(l)}(x) = f^{(l)}(0) = 0. \tag{3.24}$$

První krok matematické indukce je jednoduchý . Nechť $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $l = 0$. Rovnosti v (3.24) jsou vlastně jen jinými zápisy vztahu (3.23) a definice funkce $f$, takže zde jsme hotovi.

Nyní připomeňme implikaci, kterou potřebujeme dokázat:

$$\begin{aligned} &\left(\forall j \in \{0, 1, ..., l\} \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^k} f^{(j)}(x) = f^{(j)}(0) = 0\right) \implies \\ &\implies \left(\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^k} f^{(l+1)}(x) = f^{(l+1)}(0) = 0\right). \end{aligned} \tag{3.25}$$

Protože z předpokladů víme, že $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^k} f^{(l)}(x) = f^{(l)}(0) = 0$, proto můžeme psát, že:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} f^{(l+1)}(x) &= \lim_{x\to 0} \sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} \frac{(l+2-j)!}{x^{l+3-j}} f^{(j)}(x)(-1)^{l-j} = \\ &= \sum_{j=0}^{l} \binom{l}{j} (l+2-j)!(-1)^{l-j} \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{l+3-j}} f^{(j)}(x) \overset{(*)}{=} 0. \end{aligned}$$

$(*)$ V uvedené rovnosti využíváme indukčního předpokladu.

Nyní tedy můžeme podle definice spočítat $f^{(l+1)}(0)$:

$$f^{(l+1)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(l)}(x) - f^{(l)}(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(l)}(x)}{x} \overset{(**)}{=} \lim_{x\to 0} f^{(l+1)}(x) = 0.$$

$(**)$ Aplikujeme l'Hospitalovo pravidlo.

Právě jsme dokázali požadovanou implikaci (3.25), takže víme, že

$$\forall l \in \mathbb{N} \cup \{0\} : f^{(l)}(0) = 0.$$

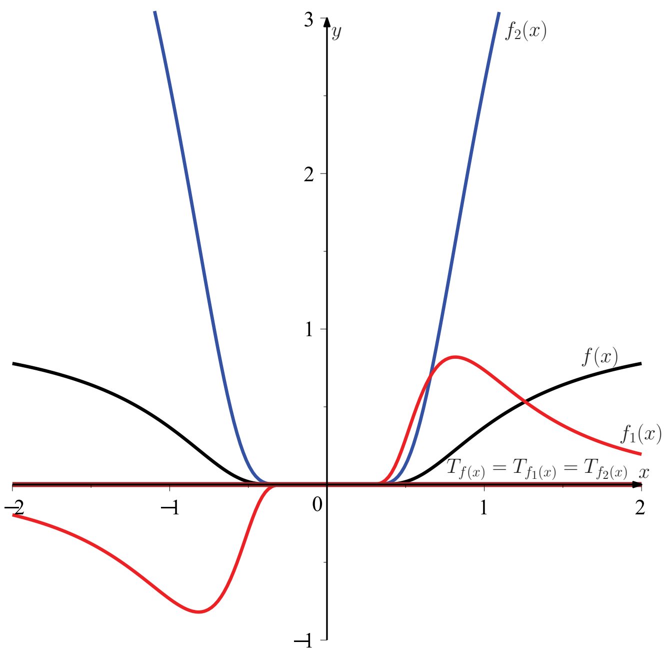
IV

Nyní již je zřejmé, že Maclaurinův polynom libovolného řádu dané funkce bude nulový. Poznamenejme ještě, že stejný polynom obdržíme také pro funkce typu $c \cdot f$, kde $c \in \mathbb{R}$ nebo $c \cdot f'$, kde $c \in \mathbb{R}$ (viz. obr. 3.4). Předpisy funkcí jsou

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 7\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$




Obrázek 3.4. Funkce $f(x), f_1(x), f_2(x)$ a jejich Taylorův polynom

## 4. Funkce o-malé

V této kapitole vycházíme z velmi známých poznatků, které lze nalézt například v [11]. Pro výpočet v Taylorově polynomu je výhodné zbytek vyjádřit pomocí tzv. o-malé funkce. Na začátek uveďme několik základních vlastností.

**Definice 3.** Nechť $a \in \mathbb{R}$ a $f, h$ jsou dvě reálné funkce reálné proměnné definované v jistém $P_a$. Potom budeme značením

$$f(x)=o(h(x)) \text{ pro } x \to a \tag{4.1}$$

vyjadřovat, že platí vztah

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{h(x)} = 0. \tag{4.2}$$

**Definice 4.** Mějme dány tři reálné funkce $f, g, h$ jedné reálné proměnné, definované v jistém $P_a$. Pak zápisem

$$f(x) = g(x) + o(h(x)) \text{ pro } x \to a \tag{4.3}$$

vyjadřujeme, že platí

$$f(x) - g(x) = o(h(x)) \text{ pro } x \to a \tag{4.4}$$

*Poznámka.* Podobným způsobem definujeme symboly, kde $x$ půjde k $a$ zleva nebo zprava. Zápisem $f(x) = o(h(x))$ nemáme na mysli rovnost funkcí, ale pouze vyjádření přislušné vlastnosti. Symbol $o(h(x))$ znamená funkci $f$ takovou, že $f(x) = o(h(x))$, kde však funkce $f$ není explicitně určena. Pro efektivní počítání s $o$ symbolem budeme potřebovat. Pokud bude z kontextu jasné, v jakému bodu se uvažují příslušné limity, nebudeme psát $x \to a$.

**Věta 6.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$ a nechť $f, g, h$ jsou funkce definované v jistém $P_a$. Pak pro $x \to a$ platí*

$$(f(x) = o(h(x)) \wedge g(x) = o(h(x)) \implies f(x) \pm g(x) = o(h(x)). \tag{4.5}$$

*Důkaz.* Z předpokladů plyne, že $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{h(x)} = 0$ a $\lim\limits_{x\to a} \frac{g(x)}{h(x)} = 0$. A protože víme, že obě tyto limity existují, tak podle věty o limitě součtu můžeme psát

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) + g(x)}{h(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{h(x)} + \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{h(x)} = 0.$$

Podobným postupem lze dokázat i vztah pro rozdíl funkcí $f$ a $g$. □

**Věta 7.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$ a nechť $f, g, h, k$ jsou funkce definované v jistém $P(a)$. Pak pro $x \to a$ platí*

$$(f(x) = o(h(x)) \wedge g(x) = o(k(x)) \implies (f \cdot g)(x) = o((h \cdot k)(x)). \tag{4.6}$$

*Důkaz.* Z předpokladů plyne, že $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{h(x)} = 0$ a $\lim\limits_{x\to a} \frac{g(x)}{k(x)} = 0$. A protože víme, že obě tyto limity existují, tak podle věty o limitě součinu můžeme psát

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) \cdot g(x)}{(h \cdot k)(x)} = (\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{h(x)}) \cdot (\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{k(x)}) = 0.$$

□

**Věta 8.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$ a nechť $f, g, h$ jsou funkce definované v jistém $P_a$. Pak pro $x \to a$ platí*

$$\left(\exists c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : c = \lim_{x\to a} \frac{h(x)}{g(x)}\right) \implies (f(x) = o(g(x)) \Leftrightarrow f(x) = o(h(x)). \tag{4.7}$$

*Důkaz.* Směr $\implies$. Z předpokladů plyne, že $\lim_{x\to a} |\frac{h(x)}{g(x)}| = |c|$, to znamená, že existuje prstencové okolí bodu $a$, na kterém funkci $|h(x)|$ můžeme odhadnout vztahem $\frac{|c|}{2}|g(x)| \leq |h(x)| \leq 2|c|\cdot|g(x)|$. Podíl funkcí $f(x)$ a $h(x)$ tedy můžeme na příslušném okolí odhadnout jako

$$\frac{1}{2|c|}\frac{|f(x)|}{|g(x)|} \leq \frac{|f(x)|}{|h(x)|} \leq \frac{2}{|c|}\frac{|f(x)|}{|g(x)|}.$$

Teď již můžeme použít větu o limitě sevřené funkce. Protože $\lim_{x\to a} \frac{1}{2|c|}\frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0$ a $\lim_{x\to a} \frac{2}{|c|}\frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0$, tak podle věty o limitě sevřené funkce je i $\lim_{x\to a} \frac{|f(x)|}{|h(x)|} = 0$, z toho tedy vyplývá $f(x) = o(h(x))$. Podobně lze dokázat i obrácenou implikaci, a tím pádem i ekvivalenci. $\square$

**Věta 9.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$ a nechť $f, g, h$ jsou funkce definované v jistém $P_a$. Pak pro $x \to a$ platí*

$$(g \text{ je omezená v } P_a \wedge f(x) = o(h(x))) \implies (f \cdot g)(x) = o(h(x)). \tag{4.8}$$

*Důkaz.* Funkci $|g(x)|$ lze v $P_a$ odhadnout nějakým číslem $m \in \mathbb{R}$ tak, že $|g(x)| \leq m$. Tedy také $|\frac{g(x)\cdot f(x)}{h(x)}|$ můžeme ve zmíněném okolí odhadnout jako

$$\frac{|g(x)\cdot f(x)|}{|h(x)|} \leq m\frac{|f(x)|}{|h(x)|}.$$

A protože je limita $\lim_{x\to a} m\frac{|f(x)|}{|h(x)|} = 0$, tak je i limita $\lim_{x\to a} \frac{|(g\cdot f)(x)|}{|h(x)|} = 0$. $\square$

*Poznámka.* Tvrzení předchozích vět můžeme zapsat do schematické tabulky

$$(f(x) = o(h(x)) \wedge g(x) = o(h(x)) \implies f(x) \pm g(x) = o(h(x)).$$

$$(f(x) = o(h(x)) \wedge g(x) = o(k(x)) \implies f(x)\cdot g(x) = o((h\cdot k)(x)).$$

$$\left(\exists c \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : c = \lim_{x\to a} \frac{h(x)}{g(x)}\right) \implies (f(x) = o(g(x)) \Leftrightarrow f(x) = o(h(x)).$$

$$(g \text{ je omezená v } P_a \wedge f(x) = o(h(x))) \implies (f \cdot g)(x) = o(h(x)).$$

Nyní už tedy máme nějakou představu o tom, jak se s o-malými funkcemi dá pracovat. V rámci používání příslušného kalkulu budeme dále používat například následující „důsledky“ vztahů (4.5)(4.6):

$$o(h(x)) \pm o(h(x)) = o(h(x)) \tag{4.9}$$

$$o(h(x)) \cdot o(k(x)) = o(h(x) \cdot k(x)). \tag{4.10}$$

Nyní ještě uveďme přímy důsledek vět 2 a 5.

**Věta 10.** *Nechť $a \in \mathbb{R}$, a $n \in \mathbb{N}$ a nechť má funkce $f$ v bodě $a$ konečnou $n$-tou derivaci. Pak jediným polynomem $P$ stupně nejvýše $n$, který splňuje podmínku*

$$f(x) = P(x) + o((x-a)^n) \text{ pro } x \to a \tag{4.11}$$

*je Taylorův polynom $T_{n,f,a}$.*

*Důkaz.* Podmínka (4.11) znamená, že platí:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^n}=0.$$

Když využijeme věty 2, tak víme, že pro Taylorův polynom $T_{n,f,a}$ platí

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-T_{n,f,a}(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{R_n(x)}{(x-a)^n}=0.$$

Z věty 5 ovšem plyne, že existuje jediný polynom $P$, takový že platí

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^n}=0.$$

Odtud

$$P=T_{n,f,a}.$$

□

A teď si můžeme ukázat praktičtější důsledek předchozích tvrzení.

**Věta 11.** *Mějme dány dva Taylorovy polynomy n-tého řádu funkcí $f$ a $g$ se středem v bodě $a$:*

$$T_{n,f,a}(x)=\sum_{j=0}^{n}a_j(x-a)^j,\ T_{n,g,a}(x)=\sum_{i=0}^{n}b_i(x-a)^i.$$

*Pak platí*

$$T_{n,f+g,a}(x)=T_{n,f,a}(x)+T_{n,g,a}(x)=\sum_{j=0}^{n}(a_j+b_j)(x-a)^j, \tag{4.12}$$

$$T_{n,f-g,a}(x)=T_{n,f,a}(x)-T_{n,g,a}(x)=\sum_{j=0}^{n}(a_j-b_j)(x-a)^j. \tag{4.13}$$

*Důkaz.* Nejprve si dokažme první tvrzení (4.12). Rozepíšeme si funkce $f(x)$ a $g(x)$ podle výše zmíněných vět, pomocí Taylorova polynomu jednoznačně jako $f(x)=T_{n,f,a}(x)+o((x-a)^n)$ a $g(x)=T_{n,g,a}(x)+o((x-a)^n)$. Po sečtení dostaneme $f(x)+g(x)=T_{n,f,a}(x)+o((x-a)^n)+T_{n,g,a}(x)+o((x-a)^n)$, z čehož pomocí (4.9) dostaneme $(f+g)(x)=T_{n,f,a}(x)+T_{n,g,a}(x)+o((x-a)^n)$. Protože $T_{n,f,a}+T_{n,g,a}$ je polynom stupně nejvýše $n$, dostaneme z věty 10 dokazovanou rovnost $T_{n,f,a}+T_{n,g,a}=T_{n,f+g,a}(x)+o((x-a)^n)$. Důkaz vztahu (4.13) se provede analogicky, proto ho necháme na čtenáři. □

*Poznámka.* Připomeňme si stručně pojem Cauchyova součinu. Nechť

$$P(x)=\sum_{j=0}^{n}a_j(x-a)^j,\ \ Q(x)=\sum_{j=0}^{n}b_j(x-a)^j$$

jsou zadané polynomy. Položme formálně

$$\forall j\in\{n+1,\dots,2n\}:a_j=0,\,b_j=0.$$

Potom polynom $R=P\cdot Q$, lze psát ve tvaru

$$R(x)=\sum_{j=0}^{2n}c_j(x-a)^j,\ \text{kde}\ \forall j\in\{0,1,\dots,2n\}:c_j=\sum_{l=0}^{j}a_l\cdot b_{j-l}.$$

Tedy

$$R(x)=\sum_{j=0}^{2n}\sum_{l=0}^{j}a_l\cdot b_{j-l}(x-a)^j.$$

**Definice 5.** Nechť je dán polynom $P(x)=\sum\limits_{j=0}^{n}a_j(x-a)^j$ a číslo $r\in\{0,1,...,n\}$. Pak ořezem $r$-tého řádu polynomu $P$ rozumíme polynom

$$\lceil P(x)\rceil_r=\sum_{j=0}^{r}a_j(x-a)^j.$$

Tedy $\lceil P(x)\rceil_r$ je polynom stupně nejvýše $r$.

**Věta 12.** *Mějme dány dva Taylorovy polynomy $n$-tého řádu funkcí $f$ a $g$ se středem v bodě $a$:*

$$T_{n,f,a}(x)=\sum_{j=0}^{n}a_j(x-a)^j,\ T_{n,g,a}(x)=\sum_{i=0}^{n}b_i(x-a)^i.$$

*Pak platí*

$$T_{n,f\cdot g,a}(x)=\lceil T_{n,f,a}(x)\cdot T_{n,g,a}(x)\rceil_n=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i}a_jb_{i-j}(x-a)^i. \tag{4.14}$$

*Důkaz.* Funkce $f(x)$ a $g(x)$ si vyjádříme pomocí Taylorova polynomu jako $f(x)=T_{n,f,a}(x)+o((x-a)^n)$ a $g(x)=T_{n,g,a}(x)+o((x-a)^n)$. Pokud vynásobíme funkce v tomto tvaru, tak dostaneme

$$\begin{aligned}(f\cdot g)(x)=&T_{n,f,a}(x)\cdot T_{n,g,a}(x)+T_{n,f,a}(x)\cdot o((x-a)^n)+T_{n,g,a}(x)\cdot o((x-a)^n)+o((x-a)^{2n})=\\
\overset{(*)}{=}&T_{n,f,a}(x)\cdot T_{n,g,a}(x)+o((x-a)^n)+o((x-a)^n)+o((x-a)^n)=\\
\overset{(**)}{=}&T_{n,f,a}(x)\cdot T_{n,g,a}(x)+o((x-a)^n)=\\
\overset{(***)}{=}&\lceil T_{n,f,a}(x)\cdot T_{n,g,a}(x)\rceil_n+\sum_{i=n+1}^{2n}\sum_{j=0}^{i}a_jb_{i-j}(x-a)^i+o((x-a)^n)=\\
\overset{(****)}{=}&\lceil T_{n,f,a}(x)\cdot T_{n,g,a}(x)\rceil_n+(x-a)^{n+1}\cdot\sum_{i=n+1}^{2n}\sum_{j=0}^{i}a_jb_{i-j}(x-a)^{i-(n+1)}+o((x-a)^n)=\\
\overset{(*****)}{=}&\lceil T_{n,f,a}(x)\cdot T_{n,g,a}(x)\rceil_n+o((x-a)^n)+o((x-a)^n)=\\
\overset{(******)}{=}&\lceil T_{n,f\cdot g,a}(x)\rceil_n+o((x-a)^n).\end{aligned}$$

$(*)$ Využili jsme větu 9: $T_{n,f,a}(x)\cdot o((x-a)^n)=o((x-a)^n)$, $T_{n,g,a}(x)\cdot o((x-a)^n)=o((x-a)^n)$ a zřejmý vztah $o((x-a)^{2n})=o((x-a)^n)$.

$(**)$ Sečetli jsme tři členy $o((x-a)^n)$ podle (4.9).

$(***)$ Zapsali jsme polynom jako pomocí oříznutí $r$-tého řádu a příslušného zbytku.

$(****)$ Vytknuli jsme $(x-a)^{n+1}$ ve druhém sčítanci.

$(*****)$ $(x-a)^{n+1}\cdot\sum_{i=n+1}^{2n}\sum_{j=0}^{i}a_jb_{i-j}(x-a)^{i-(n+1)}=o((x-a)^n)$.

$(******)$ $o((x-a)^n)+o((x-a)^n)=o((x-a)^n)$, a následně z věty 10 plyne, že

$$\lceil T_{n,f,a}(x)\cdot T_{n,g,a}(x)\rceil_n=\lceil T_{n,f\cdot g,a}(x)\rceil_n.$$

□

4.1. **Příklady využití funkcí o-malých k určení Taylorova polynomu.**

**Příklad 3.** Využijme nyní získaných poznatků k určení Maclaurinova polynomu třetího řádu funkce $\cos x \cdot \mathrm{e}^x$. Připomeňme si tedy nejprve, jak budou vypadat rozvoje jednotlivých funkcí (viz. (3.8), (3.6)):

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$$
$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

Budeme tedy násobit Taylorův polynom třetího řádu funkce $\cos x$ s Taylorovým polynomem třetího řádu funkce $\mathrm{e}^x$, ale následně ponecháme pouze mocniny, které budou nejvýše třetího stupně (viz. věta 12)

$$\begin{aligned}\cos x \cdot \mathrm{e}^x &= (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)) \cdot (1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)) = \\ &= \left[1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_3 + (o(x^3) - \frac{x^2}{2}o(x^3) + o(x^3) + x \cdot o(x^3) + \frac{x^2}{2}o(x^3) + o(x^6)) = \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} + o(x^3) = 1 + x + o(x^3) \text{ (pro } x \to 0).\end{aligned}$$

Uvedený postup je často zapisován stručněji, polynom hned „ořezáváme“ a vyšší mocniny, než je řád námi hledaného polynomu rovnou „převedeme“ do $o(x^3)$ :

$$\begin{aligned}\cos x \cdot \mathrm{e}^x &= (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)) \cdot (1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^3)) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} + o(x^3) = \\ &= 1 + x + o(x^3).\end{aligned}$$

**Příklad 4.** Najděme nyní Maclaurinův polynom čtvrtého řádu pro funkci $\sin(2x) \cdot \mathrm{e}^{x^2}$. Opět si jednotlivé funkce rozepíšeme s použitím (3.9), (3.6).

$$\sin 2x = 2x - \frac{1}{3!}(2x)^3 + o((2x)^4) = 2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^4)$$
$$\mathrm{e}^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{(x^2)^2}{2} + o((x^2)^3) = 1 + x^2 + o(x^4).$$

Násobením jednotlivých funkcí dostaneme

$$\begin{aligned}\sin(2x) \cdot \mathrm{e}^{x^2} &= (2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^4)) \cdot (1 + x^2 + o(x^4)) = \\ &= \left[2x + 2x^3 - \frac{4}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^5\right]_4 + (2x \cdot o(x^4) - \frac{4}{3}x^3 o(x^4) + o(x^4) + x^2 o(x^4) + o(x^8)) = \\ &= 2x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^4) \text{ (pro } x \to 0).\end{aligned}$$

Stručný zápis:

$$\begin{aligned}\sin(2x) \cdot \mathrm{e}^{x^2} &= (2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^4)) \cdot (1 + x^2 + o(x^4)) = 2x + 2x^3 - \frac{4}{3}x^3 + o(x^4) = \\ &= 2x + \frac{2}{3}x^3 + o(x^4).\end{aligned}$$

## 5. Aplikace Taylorova polynomu jedné proměnné

5.1. **Aplikace Taylorova vzorce k výpočtu limit.** Při výpočtech využijeme vztahů (3.6), (3.8) , (3.9) a (3.10).

**Příklad 5.** Vypočtěme $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[5]{x+1}+\sin x}{x}$. Pro ilustraci si rozepišme jednotlivé funkce ve tvaru, v jakém je využijeme.

$$\sqrt[4]{x+1} = 1+\frac{1}{4}x+o(x^2)$$
$$\sqrt[5]{x+1} = 1+\frac{1}{5}x+o(x^2)$$
$$\sin x = x+o(x^2)$$

Potom můžeme psát

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[5]{x+1}+\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+\frac{x}{4}+o(x^2))-(1+\frac{x}{5}+o(x^2))+(x+o(x^2))}{x} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{x}{4}+-1-\frac{x}{5}+x+o(x^2))}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{20}+x+o(x^2))}{x} = \frac{1}{20}+1 = \frac{21}{20}.$$

**Příklad 6.** Vypočtěme $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x^2}$. Rozepišme si funkci ve tvaru, v jakém ji využijeme.

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3))-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^3)}{x^2} = \lim_{x\to 0}(\frac{\frac{-x^2}{2}}{x^2}+\frac{o(x^3)}{x^2}) =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-x^2}{2}}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{o(x^3)}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

**Příklad 7.** Vypočtěme $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos(x)-\sin(x)}{x^3}$. Rozepišme si funkce ve tvaru, v jakém je využijeme.

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)$$
$$\sin x = x-\frac{x^3}{6}+o(x^5)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos(x)-\sin(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(1-\frac{x^2}{2}+o(x^3))-(x-\frac{x^3}{6}+o(x^5))}{x^3} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{2}-x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^3} = -\frac{1}{3}.$$

**Příklad 8.** Vypočtěme $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(x)-\sin(x)+e^x-2}{x^2}$. Rozepišme si funkce ve tvaru v, jakém je využijeme.

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$
$$\sin x = x+o(x^2)$$
$$\mathrm{e}^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-\sin(x)+e^x-2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2))-(x+o(x^2))+(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2))-2}{x^2}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}-x+1+x+\frac{x^2}{2}-2+o(x^2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x^2)}{x^2}=0.$$

5.2. **Použití Taylorova polynomu k výpočtu hodnot funkcí.**

**Příklad 9.** Pomocí Taylorova polynomu třetího stupně určíme přibližnou hodnotu $\sqrt[3]{29}$. Dále odhadneme příslušnou chybu.

Budeme tedy uvažovat funkci $f(x)=\sqrt[3]{x}$ a jako střed si vybereme bod $a=27$. Zřejmě $f\in C^{(4)}((0,54))$. Vypočteme tedy příslušné derivace v bodě $a$ a jejich funkční hodnoty.

$$\begin{aligned}f(x)&=\sqrt[3]{x}\\ f'(x)&=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\\ f''(x)&=-\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}\\ f'''(x)&=\frac{10}{27\sqrt[3]{x^8}}\\ f^{(4)}(x)&=-\frac{80}{81\sqrt[3]{x^{11}}}.\end{aligned}$$

Když si spočteme funkční hodnoty v bodě $a=27$, tak dostaneme

$$\begin{aligned}f(27)&=3\\ f'(27)&=\frac{1}{27}\\ f''(27)&=-\frac{2}{2187}\\ f'''(27)&=\frac{10}{177147}.\end{aligned}$$

Z Taylorovy věty (viz. 3):

$$f(29)=f(27)+\frac{f'(27)}{1!}\cdot 2^1+\frac{f''(27)}{2!}\cdot 2^2+\frac{f'''(27)}{3!}\cdot 2^3+\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\cdot 2^4,\ \text{kde } \xi\in(27,29).$$

A díky tomu už můžeme spočítat přibližnou hodnotu $\sqrt[3]{29}$ jako

$$\sqrt[3]{29}\doteq 3+\frac{1}{27}\cdot 2^1-\frac{\frac{2}{2187}}{2}\cdot 2^2+\frac{\frac{10}{177147}}{6}\cdot 2^3=\frac{1632757}{531441}\doteq 3.072320352.$$

Nyní provedeme odhad chyby:

$$\left|\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\cdot 2^4\right|=\frac{2}{3}\cdot\frac{80}{81}\left|\frac{1}{\sqrt[3]{\xi^{11}}}\right|\le\frac{160}{243}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{27^{11}}}=\frac{160}{243}\cdot\frac{1}{3^{11}}=\frac{160}{43046721}<3.72\cdot 10^{-6}.$$

Můžeme tedy říci, že po zaokrouhlení jsou všechny cifry ve vyjádření $\sqrt[3]{29}\doteq 3.0723$ platné.

**Příklad 10.** Pokusme se pomocí Maclaurinova polynomu aproximovat funkci kosinus s přesností $10^{-9}$. Abychom docílili stejné přesnosti jaká je na kalkulačkách, tak díky symetriím a periodicitě nám stačí umět počítat s dostatečnou přesností hodnoty pro $\cos x$, kde $x\in(0,\frac{\pi}{4})$.

Maclaurinův polynom stupně $2n+2$ je vlastně Maclaurinovým polynomem řádu $2n+3$, takže můžeme psát:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + R_{2n+3}(x), \text{ kde } R_{2n+3} = \frac{(-1)^{n+2} x^{2n+3}}{(2n+3)!} \sin\xi, \text{ kde } \xi \in (0,x).$$

Když odhadneme velikost odhadu zbytku pro $x \in (0, \frac{\pi}{4})$ jako ( pro $\xi \in (0, \frac{\pi}{4})$ platí$|\sin\xi| \leq \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{3}{4}$):

$$|R_{2n+3}(x)| < \frac{3}{4} \cdot \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!} < \frac{3}{4} \cdot \frac{(\frac{\pi}{4})^{2n+3}}{(2n+3)!} < \frac{3}{4} \cdot \frac{(\frac{11}{14})^{2n+3}}{(2n+3)!},$$

Protože posloupnost $\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{(\frac{11}{14})^{2n+3}}{(2n+3)!}\right)$ je klesající, snadno experimentálně určíme, že k dosažení požadované přesnosti stačí zvolit $n = 5$, kde už je velikost odhadu zbytku $5.24 \cdot 10^{-12}$, což už je menší než $10^{-9}$. A proto, když použijeme pro výpočet $\cos x$ jeho přibližný vztah

$$\cos x \doteq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!},$$

tak dostaneme hodnotu kosinu s chybou, která bude menší, než $10^{-9}$ pro každé $x \in (0, \frac{\pi}{4})$.

## 5.3. **Využití Taylorova polynomu k numerickému derivování.**

**Příklad 11.** Taylorův polynom lze také využít pro získání vzorců pro numerickou derivaci, což je numerická metoda aproximace derivace funkce. Mějme funkci $f$, která má v bodě $a$ spojité derivace až do druhého řádu. Odhadněme přibližnou hodnotu první derivace tak, že si nejprve podle věty 10 rozepíšeme hodnoty Taylorova polynomu v bodech $a+h$ a $a-h$ :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \frac{f''(a) \cdot h^2}{2} + o(h^2) \tag{5.1}$$

$$f(a-h) = f(a) + f'(a) \cdot (-h) + \frac{f''(a) \cdot (-h)^2}{2} + o((-h)^2). \tag{5.2}$$

Pokud si nyní od (5.1) odečteme (5.2), tak dostaneme výraz (připomeňme, že $o(h^2) - o((-h)^2) = o(h^2)$):

$$f(a+h) - f(a-h) = f'(a) \cdot h - f'(a) \cdot (-h) + o(h^2). \tag{5.3}$$

Když si následně z (5.3) vyjádříme první derivaci jako

$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} - \frac{o(h^2)}{2h},$$

tak už dostaneme vztah ($-\frac{o(h^2)}{2h} = o(h)$):

$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} + o(h), \tag{5.4}$$

který lze využít pro výpočet numerické derivace prvního řádu. Poznamenejme, že pokud uvažujeme klasický odhad první derivace: $f'(a) \doteq \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, pro který platí

$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{o(h)}{h},$$

tak lokální chyba $\frac{o(h)}{h}$ této aproximace je řádově horší, než ve vztahu (5.4).

*Poznámka.* Pokud bychom chtěli dostat i numerický odhad chyby, tak bychom museli požadovat i existenci omezené konečné třetí derivace funkce $f$ na okolí bodu $a$. Analogicky jako ve výše uvedeném příkladě, zjistíme dvojnásobným použitím věty 3, že pro dostatečně malé $h > 0$ existují čísla $\xi_1 \in (a, a+h)$, $\xi_2 \in (a-h, a)$ taková, že platí:

$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} + \frac{R_2(a+h) - R_2(a-h)}{2h} = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} + \frac{\frac{f'''(\xi_1)}{3!}h^3 - \frac{f'''(\xi_2)}{3!}(-h)^3}{2h}.$$

Odtud

$$\left| f'(a) - \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} \right| \leq \frac{M \cdot h^2}{6}, \text{ kde } M = \sup_{\xi \in (a-h, a+h)} \left| f'''(\xi) \right|.$$

*Poznámka.* Popišme nyní stručně odvození numerického vztahu pro druhou derivaci. Když rovnice (5.1) a (5.2) sečteme, tak dostaneme

$$f(a+h) + f(a-h) = 2f(a) + 2 \cdot \frac{f''(a) \cdot h^2}{2} + o(h^2). \tag{5.5}$$

Když si vyjádříme z (5.5) druhou derivaci, tak dostaneme

$$f''(a) = \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} + \omega(h), \text{ kde } \omega(h) = -\frac{o(h^2)}{h^2},$$

takže

$$\lim_{h \to 0} \omega(h) = 0.$$

5.4. **Aplikace Taylorova ke hledání extrémů.** Nechť $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Mějme funkci $f$, která má v okolí bodu $a$ konečné derivace až do $k$-tého řádu. A nechť také platí:

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(k-1)}(a) = 0 \text{ a } f^{(k)}(a) \neq 0.$$

Potom podle věty 2 existuje funkce $\omega_k$ taková, že $\lim\limits_{x \to a} \omega_k(x) = 0$ a platí:

$$f(x) = T_k(x) + \omega_k(x) \cdot (x-a)^k = f(a) + \left( \frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \omega_k(x) \right) \cdot (x-a)^k.$$

Výraz $\left[ \frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \omega_k(x) \right]$ má pro $x \to a$ limitu, která je rovna $\frac{f^{(k)}(a)}{k!}$, tedy číslo, které podle předpokladu bude nenulové. Z toho tedy plyne, že bude existovat okolí $P_a$, kde tento výraz nebude měnit znaménko. Pro sudé $k$ platí, že aby bylo v bodě ostré lokální maximum ($\forall x \in P_a :$ $f(x) - f(a) < 0$ ) stačí, aby byla splněna nerovnost

$$\forall x \in P_a : \left( \frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \omega_k(x) \right) \cdot (x-a)^k < 0.$$

Skutečně, protože $k$ je sudé můžeme psát

$$\forall x \in P_a : f(x) - f(a) = \left[ \frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \omega_k(x) \right] \cdot (x-a)^k < 0.$$

Z toho už můžeme usoudit, že když v bodě $a$ má být ostré lokální maximum, stačí aby $\frac{f^{(k)}(a)}{k!} < 0$. Analogicky si můžeme postup představit pro ostré lokální minimum:

$$\left( \frac{f^{(k)}(a)}{k!} > 0 \right) \implies \left( \exists P_a \forall x \in P_a : f(x) - f(a) = \left[ \frac{f^{(k)}(a)}{k!} + \omega_k(x) \right] \cdot (x-a)^k > 0 \right).$$

Pokud je $k$ liché, tak víme, že $f^{(k-1)}(a) = 0$ tedy, že funkce $f$ je na $P_a^-$ konvexní a na $P_a^+$ konkávní nebo obráceně, z toho tedy vyplývá, že bod $a$ je inflexním bodem.

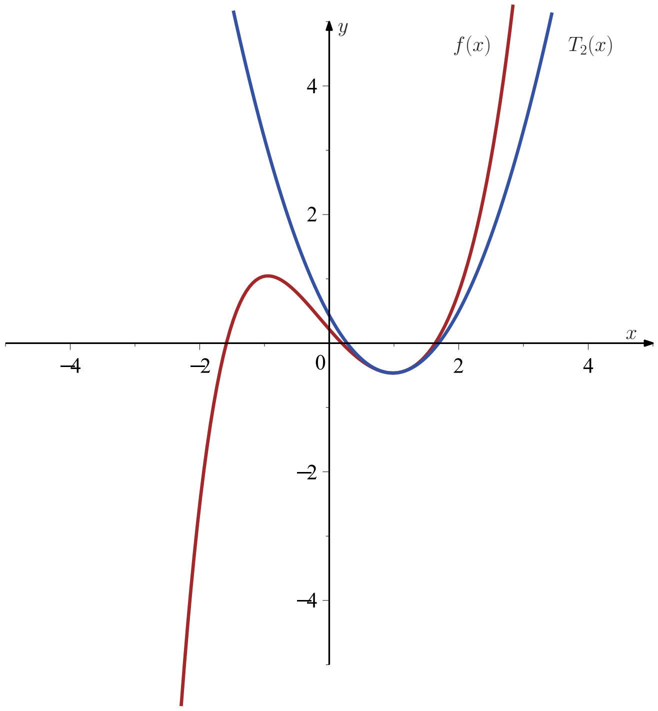
Shrnuté poznatky tedy můžeme přehledně shrnout v následujícím tvrzení.

**Věta 13.** *Nechť $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Mějme funkci $f$, která má v okolí bodu $a$ konečné derivace až do $k$-tého řádu. Nechť také platí:*

$$f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(k-1)}(a) = 0 \ a \ f^{(k)}(a) \neq 0.$$

*Pak platí, bude-li $k$ sudé číslo, pak v bodě $a$ bude lokální extrém. Přitom, pokud bude $f^{(k)}(a) < 0$, bude v bodě $a$ ostré lokální maximum, a pokud bude $f^{(k)}(a) > 0$, tak bude v bodě $a$ ostré lokální minimum.*

Pokusme se toto tvrzení graficky znázornit pro druhý Taylorův polynom a funkci $f(x) = \frac{3x^5 - 11x^4 + 36x^3 + 18x^2 - 112x + 21}{97}$.




Obrázek 5.1. Znázornění ostrého lokálního minima funkce $f(x)$

*Poznámka.* Lze ukázat, že je-li řád $k > 1$ první nenulové derivace funkce $f$ v bodě $a$ liché číslo, pak bude bod $a$ bodem inflexe funkce $f$.

**Příklad 12.** Kritéria odvozená ve větě 13 jsou velmi často uváděna v základních kurzech matematiky. Někdy je však přímý výpočet derivací obtížný, nyní ukážeme, jak v tomto případě pokračovat. Mějme například danou funkci $f(x) = \sin^2(x) \cdot \ln(\cos(x))$. Pomocí Maclaurinova polynomu určeme, zda má funkce v bodě $x = 0$ lokální minimum nebo lokální maximum. Napišme si tedy nejprve rozvoje jednotlivých funkcí podle vztahů (3.7), (3.8) a (3.9)

$$\begin{aligned} \sin x &= x + o(x^3),\ x \to 0 \\ \ln(1+y) &= y + o(y^2),\ y \to 0 \qquad (5.6) \\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^4),\ x \to 0. \end{aligned}$$

Pak dostaneme, že Maclaurinův polynom bude mít tvar

$$\begin{aligned} \sin^2(x) \cdot \ln(\cos(x)) &= (x + o(x^3))^2 \ln(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^4)) \overset{(*)}{=} \\ &= (x + o(x^3))^2 \cdot (-\frac{1}{2}x^2 + o(x^4) + o(\Big(-\frac{1}{2}x^2 + o(x^4)\Big)^2)) \overset{(**)}{=} \\ &= (x^2 + o(x^5)) \cdot (-\frac{1}{2}x^2 + o(x^3)) = -\frac{1}{2}x^4 + x^2 o(x^3) - \frac{1}{2}x^2 o(x^5) + o(x^8) = \\ &= -\frac{1}{2}x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

($*$) provedeme substituci $y = -\frac{1}{2}x^2 + o(x^4)$ a využijeme vztahu (5.6).

($**$) $o(\Big(-\frac{1}{2}x^2 + o(x^4)\Big)^2) = o(\frac{1}{4}x^4 - x^2 o(x^4) + o(x^8)) = o(x^3)$.

V okolí bodu $x = 0$ se tedy funkce $f$ „chová“ jako funkce $g(x) = -\frac{1}{2}x^4$, z toho tedy vyplývá, že funkce má v bodě $x = 0$ ostré lokální maximum. Povšimněme si faktu, že pokud bychom se snažili na zadané funkci provést test pomocí druhé derivace (ke zjištění extrémů), tak bychom příklad velmi ztížili.

5.5. **Příklady dalšího využití Taylorova polynomu.** Použitím Taylorova rozvoje lze řešit i řadu dalších problémů. Ukažme si například, jak lze dokázat jednu zajímavou nerovnost (viz. [14], str. 99).

**Příklad 13.** Nechť $f \in C^2(\mathbb{R})$. Nechť $M_0 = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$, $M_1 = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|$ a $M_2 = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f''(x)|$, kde $M_0, M_1, M_2$ jsou konečná čísla. Dokažte, že pak platí

$$M_1 \leq 4M_0M_2.$$

Platí-li, že $\forall x \in \mathbb{R} \forall h \in \mathbb{R} \exists \xi \in (x, x+2h)$ :

$$\begin{aligned} f(x+2h) &= f(x) + f'(x) \cdot 2h + \frac{f''(\xi)}{2}(2h)^2 \\ f'(x) \cdot 2h &= f(x+2h) - f(x) - \frac{4f''(\xi)}{2}h^2 \\ f'(x) &= \frac{f(x+2h) - f(x)}{2h} - f''(\xi) \cdot h \\ |f'(x)| &\leq \frac{|f(x+2h)| + |f(x)|}{2h} + h \cdot |f''(\xi)| \\ M_1 &\leq \frac{M_0 + M_0}{2h} + h \cdot M_2 \\ h \cdot M_1 &\leq M_0 + h^2 \cdot M_2 \\ 0 &\leq M_0 - h \cdot M_1 + h^2 \cdot M_2. \end{aligned}$$

Z posledního řádku vyplývá, že diskriminant takové kvadratické rovnice musí být nekladný, a tedy

$$M_1^2 - 4 \cdot M_0 M_2 \leq 0.$$

Z toho už po úpravě dostaneme

$$M_1^2 \leq 4 \cdot M_0 M_2.$$

**Příklad 14.** Taylorův polynom lze někdy využít k numerickému výpočtu takových určitých integrálů, u kterých se obtížně hledá příslušný neurčitý integrál. Například, hledejme $\int_0^{\frac{1}{2}} \sin x^2 \,\mathrm{d}x$. Díky Taylorovu rozvoji si můžeme práci zjednodušit, jak níže naznačíme. Protože známe rozvoj funkce sinus, tak ho můžeme využít při našem výpočtu.

$$\forall t \in \mathbb{R} : \sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots,$$

takže když využijeme substituci $t = x^2$, dostaneme:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \dots$$

Primitivní funkce k $\sin x^2$ není elementární, proto trikem převedeme výpočet aproximace zadaného určitého integrálu na integrál z Taylorova polynomu. Protože platí

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sin x^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[ \left( x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} \right) + \left( \frac{x^{18}}{9!} - \frac{x^{22}}{11!} + \dots \right) \right] \mathrm{d}x,$$

můžeme psát:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sin x^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \left( x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} \right) \mathrm{d}x + \int_0^{\frac{1}{2}} \left( \frac{x^{18}}{9!} - \frac{x^{22}}{11!} + \dots \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1777456667750399}{4284987369062400} + \int_0^{\frac{1}{2}} \left( \frac{x^{18}}{9!} - \frac{x^{22}}{11!} + \dots \right) \mathrm{d}x,$$

takže

$$\left| \int_0^{\frac{1}{2}} \sin x^2 \,\mathrm{d}x - \frac{1777456667750399}{4284987369062400} \right| = \left| \int_0^{\frac{1}{2}} \left( \frac{x^{18}}{9!} - \frac{x^{22}}{11!} + \dots \right) \mathrm{d}x \right| \overset{(*)}{<}$$

$$< \int_0^{\frac{1}{2}} \left( \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{12}}{12!} + \dots \right) \mathrm{d}x \overset{(**)}{=} \int_0^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^x \mathrm{d}x - \int_0^{\frac{1}{2}} \left( 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^8}{8!} \right) \mathrm{d}x =$$

$$= [\sqrt{\mathrm{e}} - 1] - \left[ x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^9}{9!} \right]_0^{\frac{1}{2}} < 10^{-9}.$$

Odtud

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sin x^2 \,\mathrm{d}x \doteq \frac{1777456667750399}{4284987369062400} \doteq 0,04148102$$

s přesností $10^{-9}$.

$(*)$ Na $< 0, \frac{1}{2} >$ odhadneme shora integrovatelnou funkci $\left( \frac{x^{18}}{9!} - \frac{x^{22}}{11!} + \dots \right)$ integrovatelnou funkcí $\left( \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{12}}{12!} + \dots \right)$.

$(**)$ Všimněme si, že $\left( \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{11}}{11!} + \frac{x^{12}}{12!} + \dots \right)$ jsou členy řady vyjadřující $\mathrm{e}^x$ bez prvních osmi členů.

## 6. Taylorův polynom více proměnných

Taylorův polynom ovšem nemusí být studován pouze pro funkce jedné proměnné. Ukažme si nyní zavedení Taylorova polynomu pro funkce dvou proměnných. Při jeho hledání vyjdeme z přirozeného požadavku, aby Taylorův polynom $m-$tého řádu funkce $f$ se středem v bodě $a$ měl shodné všechny příslušné parciální derivace jako funkce $f$.

**Definice 6.** Nechť je dána funkce $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, která má v bodě $a=(a_1,a_2)$ spojité všechny parciální derivace až do řádu $m$ včetně. Pak Taylorovým polynomem $m$-tého řádu funkce $f$ se středem v bodě $a$ rozumíme zobrazení $T_{m,f,a}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, dané předpisem:

$$\begin{aligned}T_{m,f,a}(x_1,x_2) =& f(a)+\frac{1}{1!}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial f(a)}{\partial x_i}(x_i-a_i)+\frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i\partial x_j}(x_i-a_i)(x_j-a_j)+\\ &+\frac{1}{3!}\sum_{i,j,k=1}^{2}\frac{\partial^3 f(a)}{\partial x_i\partial x_j\partial x_k}(x_i-a_i)(x_j-a_j)(x_k-a_k)+\dots+\\ &+\frac{1}{m!}\sum_{i_1,\dots,i_m=1}^{2}\frac{\partial^m f(a)}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_m}}(x_{i_1}-a_{i_1})\dots(x_{i_m}-a_{i_m}).\end{aligned}$$

Bude-li z kontextu jasný střed $a$ Taylorova polynomu i příslušná funkce $f$, místo $T_{m,f,a}$ píšeme stručněji $T_m$. Podobně jako v případě funkcí jedné proměnné, je-li střed roven bodu $(0,0)$, hovoříme o Maclaurinově polynomu.

*Poznámka.* Pro lepší představu si přepišme Taylorův polynom druhého řádu do tvaru:

$$\begin{aligned}T_{2,f,a}(x_1,x_2) =& f(a)+\left(\frac{\partial f(a)}{\partial x_1}(x_1-a_1)+\frac{\partial f(a)}{\partial x_2}(x_2-a_2)\right)+\\ &+\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1^2}(x_1-a_1)^2+2\cdot\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1\partial x_2}(x_1-a_1)(x_2-a_2)+\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_2^2}(x_2-a_2)^2\right)+\\ &+\frac{1}{3!}\left(+\frac{\partial^3 f(\xi)}{\partial x_1^3}(x_1-a_1)^3+3\frac{\partial^3 f(\xi)}{\partial x_1^2\partial x_2}(x_1-a_1)^2(x_2-a_2)+\right.\\ &\left.+3\frac{\partial^3 f(\xi)}{\partial x_1\partial x_2^2}(x_1-a_1)(x_2-a_2)^2+\frac{\partial^3 f(\xi)}{\partial x_2^3}(x_2-a_2)^3\right).\end{aligned}$$

Z tohoto přepsání už jde lépe vidět, že všechny parciální derivace (až do derivací druhého řádu) tohoto Taylorova polynomu v bodě $a$ jsou rovny příslušným parciálním derivacím funkce $f$.

Nyní si tedy můžeme napsat Taylorovu větu pro dvě proměnné.

**Věta 14.** *Nechť $m\in\mathbb{N}$, $a=(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2$, $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ a nechť $f\in C^{m+1}(U_a)$, to znamená, že $f$ má spojité všechny praciální derivace až do řádu $m+1$ v každém bodě okolí $U_a$.*
*Potom pro každé $h=(h_1,h_2)\in\mathbb{R}^2$, takové že $a+h\in U_a$ existuje $\xi\in(0,1)$ takové, že*

$$f(a+h)=T_{m,f,a}(a+h)+R_m(a+h), \tag{6.1}$$

*kde*

$$R_m(a+h)=\frac{1}{(m+1)!}\sum_{i_1,\dots,i_{m+1}=1}^{2}\frac{\partial^{m+1}f(a+\xi h)}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_{m+1}}}h_{i_1}\cdot\dots\cdot h_{i_{m+1}}. \tag{6.2}$$

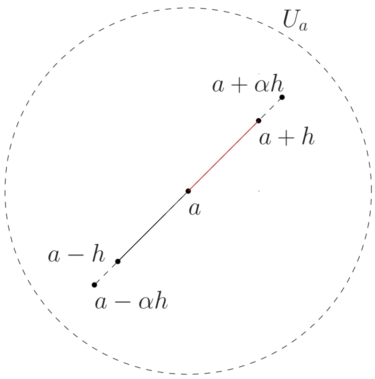
*Důkaz.* Omezíme se na příklad $m = 2$. Zvolíme si pevně bod $(x_1, x_2) \in U_a$ a dále si označíme $h_1 = x_1 - a_1$ a $h_2 = x_2 - a_2$, kde $(a_1, a_2)$ jsou souřadnice středu Taylorova polynomu. Pak $T_{m,f,a}$ z (6.1) nabývá tvaru

$$
\begin{aligned}
T_{2,f,a}(a_1 + h_1, a_2 + h_2) =& f(a) + \left( \frac{\partial f(a)}{\partial x_1} h_1 + \frac{\partial f(a)}{\partial x_2} h_2 \right) + \\
&+ \frac{1}{2!} \left( \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1^2} h_1^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1 \partial x_2} h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_2^2} h^2 \right),
\end{aligned} \tag{6.3}
$$

a máme dokázat:

$$
\begin{aligned}
R_m(a_1 + h_1, a_2 + h_2) = \frac{1}{3!} \Bigg( & \frac{\partial^3 f(a_1 + \xi h_1, a_2 + \xi h_2)}{\partial x_1^3} h_1^3 + 3 \frac{\partial^3 f(a_1 + \xi h_1, a_2 + \xi h_2)}{\partial x_1^2 \partial x_2} h_1^2 h_2 + \\
& + 3 \frac{\partial^3 f(a_1 + \xi h_1, a_2 + \xi h_2)}{\partial x_1 \partial x_2^2} h_1 h_2^2 + \frac{\partial^3 f(a_1 + \xi h_1, a_2 + \xi h_2)}{\partial x_2^3} h_2^3 \Bigg)
\end{aligned} \tag{6.4}
$$

Nyní zavedeme funkci $\varphi(t) = f(a_1 + th_1, a_2 + th_2)$, $(a + th) \in U_a$. Podle věty o diferencovatelnosti složené funkce zřejmě existuje interval $(-\alpha, \alpha) \supset < 0, 1 >$ takový, že $\varphi \in C^3(-\alpha, \alpha)$. Všimněme si, že $\varphi(0) = f(a_1, a_2)$ a $\varphi(1) = f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) = f(x_1, x_2)$. Pro lepší orientaci je uveden obrázek 6.1. Na funkci $\varphi$ můžeme použít Taylorovu větu 3. Tak dostaneme




Obrázek 6.1. Znázornění restrikce $f$ na úsečku

$$
\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!}(1-0)^1 + \frac{\varphi''(0)}{2!}(1-0)^2 + \frac{\varphi^{(3)}(\xi)}{3!}(1-0)^3,
$$

takže

$$
\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!} + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \frac{\varphi^{(3)}(\xi)}{3!}, \text{ kde } \xi \in (0, 1). \tag{6.5}
$$

Zbývá napočítat derivace funkce $\varphi$, k tomu využijeme vztahy pro výpočet derivací složené funkce:

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) =& \frac{\mathrm{d}f(a_1+th_1,a_2+th_2)}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}(a_1+th_1,a_2+th_2)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1+th_1,a_2+th_2)h_2\\
\varphi''(t) =& \frac{\mathrm{d}^2f(a_1+th_1,a_2+th_2)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a_1+th_1,a_2+th_2)h_1^2 + 2\cdot\frac{\partial f}{\partial x\partial y}(a_1+th_1,a_2+th_2)h_1h_2+\\
&+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a_1+th_1,a_2+th_2)h_2^2\\
\varphi'''(\xi) =& \frac{\mathrm{d}^3f(a_1+\xi h_1,a_2+\xi h_2)}{\mathrm{d}t^3} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a_1+\xi h_1,a_2+\xi h_2)h_1^3 + 3\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(a_1+\xi h_1,a_2+\xi h_2)h_1^2h_2+\\
&+3\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(a_1+\xi h_1,a_2+\xi h_2)h_1h_2^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a_1+\xi h_1,a_2+\xi h_2)h_2^3.
\end{aligned}$$

tedy

$$\begin{aligned}
\varphi'(0) =& \frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2)h_2\\
\varphi''(0) =& \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a_1,a_2)h_1^2 + 2\cdot\frac{\partial f}{\partial x\partial y}(a_1,a_2)h_1h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a_1,a_2)h_2^2\\
\varphi'''(\xi) =& \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a_1+\xi h_1,a_2+\xi h_2)h_1^3 + 3\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(a_1+\xi h_1,a_2+\xi h_2)h_1^2h_2+\\
&+3\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(a_1+\xi h_1,a_2+\xi h_2)h_1h_2^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a_1+\xi h_1,a_2+\xi h_2)h_2^3.
\end{aligned}$$

K dokončení důkazu stačí dosadit $\varphi'(0), \varphi''(0), \varphi'''(\xi)$ do vztahu (6.5). □

**Důsledek.** *Nechť* $m \in \mathbb{N}$, $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *a nechť* $f \in C^3(U_a)$. *Pak platí, že*

$$\lim_{h\to(0,0)} \frac{R_m(a+h)}{||h||^m} = 0. \tag{6.6}$$

*Důkaz.* Opět se omezíme na případ, kdy $m = 2$. Máme dokázat vztah (6.6), tedy

$$0 = \lim_{h\to(0,0)} \frac{R_2(a+h)}{||h||^2} =$$

$$= \lim_{h\to(0,0)} \frac{\frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a+\xi h)h_1^3 + 3\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(a+\xi h)h_1^2h_2 + 3\cdot\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(a+\xi h)h_1h_2^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a+\xi h)h_2^3\right)}{\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)^2}.$$

Když si odhadneme jmenovatele zdola jako $\max\{|h_1|, |h_2|\}$, tak můžeme psát

$$\frac{|R_2(a+h)|}{||h||^2} \le$$

$$\le \frac{\left|\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(a+\xi h)\right||h_1|^3 + 3\cdot\left|\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(a+\xi h)\right||h_1|^2|h_2| + 3\cdot\left|\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(a+\xi h)\right||h_1|\cdot|h_2|^2 + \left|\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(a+\xi h)\right||h_2|^3}{6\cdot\max\{|h_1|,|h_2|\}}.$$

Nechť $\delta \in \mathbb{R}^+$ je takové, že množina $V_a = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 \le \delta^2\} \subset U_a$. Protože $V_a$ je kompaktní, podle Weierstrassovy věty platí:

$$M = \max\left\{\left|\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x_1,x_2)\right|, \left|\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(x_1,x_2)\right|, \left|\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}(x_1,x_2)\right|, \left|\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x_1,x_2)\right| : (x_1,x_2) \in V_a\right\} \in \langle 0, \infty).$$

Pro $h$ taková, že $(a+h) \in V_a$ tedy můžeme psát odhad

$$\frac{|R_2(a+h)|}{||h||^2} \leq \frac{M \cdot |h_1|^3 + 3M \cdot |h_1|^2|h_2| + 3M \cdot |h_1| \cdot |h_2|^2 + M \cdot |h_2|^3}{6 \cdot \max\{|h_1|, |h_2|\}},$$

tedy platí:

$$\frac{|R_2(a+h)|}{||h||^2} \leq M\frac{|h_1|^3 + 3|h_1|^2|h_2| + 3|h_1| \cdot |h_2|^2 + |h_2|^3}{6 \cdot \max\{|h_1|, |h_2|\}} \leq M\frac{8 \cdot (\max\{|h_1|, |h_2|\})^3}{6 \cdot \max\{|h_1|, |h_2|\}} =$$
$$= \frac{4M}{3} \cdot (\max\{|h_1|, |h_2|\})^2 .$$

K dokončení důkazu si stačí nejprve všimnout:

$$[(0,0) \neq (h_{1k}, h_{2k}) \to (0,0)] \implies \frac{4M}{3} \cdot \left(\max\{h_{1k}^2, h_{2k}^2\}\right)^2 \to 0, \text{ pro } k \to +\infty,$$

takže můžeme psát:

$$[(0,0) \neq (h_{1k}, h_{2k}) \to (0,0)] \implies \frac{|R_2(a_1 + h_{1k}, a_2 + h_{2k})|}{||(h_{1k}, h_{2k})||^2} \to 0, \text{ pro } k \to +\infty,$$

proto i

$$\lim_{h \to (0,0)} \frac{R_2(a+h)}{||h||^2} = 0.$$

□

*Poznámka.* Platí-li pro zbytek po aproximaci Taylorovým polynomem se středem v bodě $a$ vztah

$$\lim_{h \to (0,0)} \frac{R_m(x)}{||x-a||^m} = 0,$$

pak můžeme zbytek také zapsat ve tvaru

$$R_m(x) = \omega(x) \cdot \|x-a\|^m , \tag{6.7}$$

kde

$$\omega(x) = \begin{cases} \frac{R_m(x)}{||x-a||^m} & \text{pro } x \neq a \\ 0 & \text{pro } x = a, \end{cases}$$

takže $\lim\limits_{x \to a} \omega(x) = 0$. Zápisu (6.7) se říká Peanův tvar zbytku. Lze dokázat (viz. [13], str. 417) také obrácené tvrzení. Je-li dán polynom $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stupně nejvýše $m$ takový, že

$$f(x) - P(x) = \omega(x)(x-a)^m, \text{ kde } \lim_{x \to a} \omega(x) = 0,$$

pak $P = T_{m,f,a}$.

Pro úplnost ještě uveďme zobecnění Taylorovy věty pro případ funkcí více proměnných.

**Věta 15.** *Nechť $m \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a nechť existuje $U_a$ takové, že*

$$f \in C^{m+1}(U_a).$$

*Potom pro každé $h = (h_1, h_2, ..., h_n) \in \mathbb{R}^n$ takové, že $a + h \in U_a$ platí:*

$$\exists \xi \in (0,1) : \quad f(a+h) = T_m(a+h) + R_m(a+h),$$

*kde*

$$T_m(a+h) = f(a) + \frac{1}{1!}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} h_i + \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j + \frac{1}{3!}\sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial^3 f(a)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} h_i h_j h_k +$$

$$+ \ldots + \frac{1}{m!}\sum_{i_1 \ldots i_m = 1}^{n} \frac{\partial^m f(a)}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_m}} h_{i_1} \ldots h_{i_m},$$

$$R_m(a+h) = \frac{1}{(m+1)!}\sum_{i_1 \ldots i_{m+1} = 1}^{n} \frac{\partial^{m+1} f(a + \xi \cdot h)}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_{m+1}}} h_{i_1} \ldots h_{i_{m+1}}.$$

*Navíc bude platit, že*

$$\lim_{h \to o} \frac{R_m(a+h)}{||h||^m} = 0.$$

## 7. Příklady pro Taylorův polynom více proměnných

**Příklad 15.** Najděme Maclaurinův polynom druhého stupně pro funkci $f(x,y) = \mathrm{e}^x \sin y$.

Nyní máme nejméně dva způsoby, jak pokračovat. Prvním z nich je přímá metoda, kdy si spočítáme jednotlivé parciální derivace funkce a jejich funkční hodnoty, a to až do druhé parciální derivace.

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \mathrm{e}^x \sin y\\
f_x(x,y) &= \mathrm{e}^x \sin y\\
f_y(x,y) &= \mathrm{e}^x \cos y\\
f_{xx}(x,y) &= \mathrm{e}^x \sin y\\
f_{xy}(x,y) &= \mathrm{e}^x \cos y\\
f_{yy}(x,y) &= \text{-}\mathrm{e}^x \sin y.
\end{aligned}$$

Teď, když si spočítáme funkční hodnoty těchto derivací v bodě $(a_1,a_2) = (0,0)$, tak dostaneme

$$\begin{aligned}
f(0,0) &= \mathrm{e}^0 \sin 0 = 0\\
f_x(0,0) &= \mathrm{e}^0 \sin 0 = 0\\
f_y(0,0) &= \mathrm{e}^0 \cos 0 = 1\\
f_{xx}(0,0) &= \mathrm{e}^0 \sin 0 = 0\\
f_{xy}(0,0) &= \mathrm{e}^0 \cos 0 = 1\\
f_{yy}(0,0) &= \text{-}\mathrm{e}^0 \sin 0 = 0
\end{aligned}$$

Jelikož víme, že námi hledaný Taylorův polynom druhého stupně bude mít tvar

$$\begin{aligned}
T_2(x,y) = f(a_1,a_2) + \frac{1}{1!} f_x(a_1,a_2)h_1 + f_y(a_1,a_2)h_2 + \frac{1}{2!}[(f_{xx}(a_1,a_2)h_1^2 +\\
+ f_{xy}(a_1,a_2)h_1h_2 + f_{xx}(a_1,a_2)h_2^2],
\end{aligned}$$

tak po dosazení dostaneme

$$\begin{aligned}
T_2(x,y) = 0 + \frac{1}{1!}(0\cdot(x-0) + 1\cdot(y-0)) + \frac{1}{2!}(0(x-0)^2 + 1\cdot(x-0)(y-0) + 0\cdot(y-0)^2) =\\
= y + \frac{1}{2}(2xy) = y + xy.
\end{aligned}$$

Druhý způsob výpočtu spočívá v tom, že si představíme zadaný Maclaurinův polynom jako součin dvou funkcí, a to $g(x,y) = \mathrm{e}^x$, která je konstantní vůči $y$ a $h(x,y) = \sin y$, která je konstantní vůči . Nejprve si všimeme že platí:

$$g(x,y) = 1 + x + \omega_1(x,y)\left[(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2\right], \text{ kde } \lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \omega_1(x,y) = 0,$$

$$h(x,y) = y + \omega_2(x,y)\left[(x-a_1)^2 + (y-a_2)^2\right], \text{ kde } \lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)} \omega_2(x,y) = 0.$$

Nyní příslušné vztahy vynásobíme. Po vynásobení tedy dostaneme

$$\begin{aligned}(g\cdot h)(x,y) =&(1+x+\omega_1(x,y)\left[(x-a_1)^2+(y-a_2)^2\right])\cdot(y+\omega_2(x,y)\left[(x-a_1)^2+(y-a_2)^2\right])\\ =&y+\omega_2(x,y)\left[(x-a_1)^2+(y-a_2)^2\right]+xy+x\cdot\omega_2(x,y)\left[(x-a_1)^2+(y-a_2)^2\right]+\\ &+y\cdot\omega_1(x,y)\left[(x-a_1)^2+(y-a_2)^2\right]+\\ &+\omega_1(x,y)\left[(x-a_1)^2+(y-a_2)^2\right]\cdot\omega_2(x,y)\left[(x-a_1)^2+(y-a_2)^2\right]=\\ =&y+xy+(x\cdot\omega_2(x,y)+y\cdot\omega_1(x,y)+\omega_1(x,y)\cdot\omega_2(x,y))\left[(x-a_1)^2+(y-a_2)^2\right]=\\ =&y+xy+\omega(x,y)\cdot\left[(x-a_1)^2+(y-a_2)^2\right],\end{aligned}$$

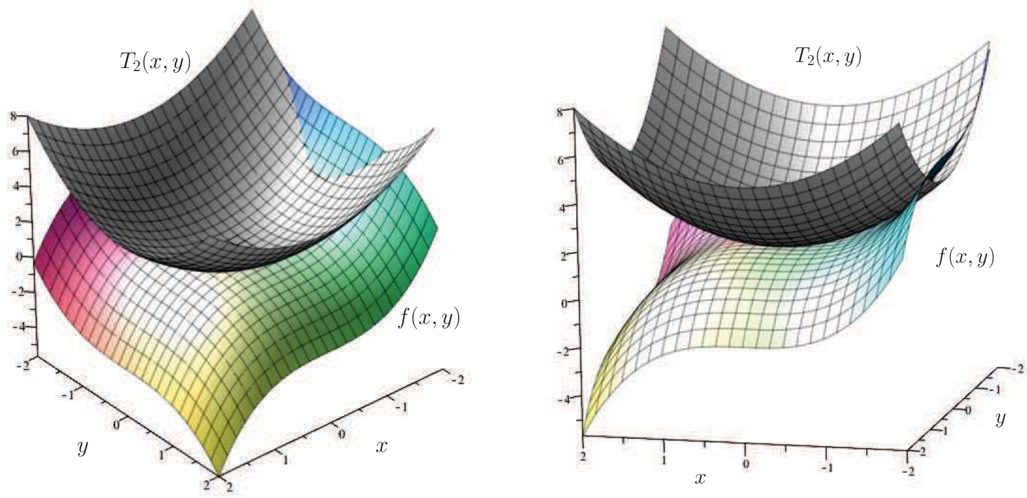
kde

$$\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)}\omega(x,y)=\lim_{(x,y)\to(a_1,a_2)}(x\cdot\omega_2(x,y)+y\cdot\omega_1(x,y)+\omega_1(x,y)\cdot\omega_2(x,y))=0.$$

Odtud získáme stejný výsledek jako v předchozím případě:

$$T_2(x,y)=y+xy.$$

**Příklad 16.** Ukažme si využití Taylorova polynomu pro dvě proměnné k určení extrému funkcí. Pokusme se tedy zjistit lokální extrémy funkce $f(x,y)=(1-\frac{x^3}{2}-\frac{y^3}{3})e^{\frac{3}{4}x^2+y^2}$. Znázorněme si funkci na grafu uvedeném níže.




Obrázek 7.1. Graf funkce $f(x,y)=(1-\frac{x^3}{2}-\frac{y^3}{3})e^{\frac{3}{4}x^2+y^2}$ a jejího Taylorova polynomu

Snadno se ověří, že bod $(0,0)$ je stacionární bod funkce $f$, to znamená $f_x(0,0)=0$ a $f_y(0,0)=0$. Z obrázku 7.1 můžeme hádat, že funkce $f$ má v bodě $(0,0)$ lokální minimum. Znázornění grafu ovšem může být zavádějící a v bodě $(0,0)$ minimum být nemusí. Proto zde využijeme Taylorova polynomu se středem v bodě $(0,0)$. V podstatě nahradíme funkci Maclaurinovým polynomem druhého řádu $T_2(x,y)$. Uvedený polynom tedy bude mít tvar

$$\begin{aligned}T_2(x,y) =& f(0,0)+f_x(0,0)(x-0)+f_y(0,0)(y-0)+\frac{f_{xx}(0,0)}{2}(x-0)^2+\frac{f_{yy}(0,0)}{2}(y-0)^2+\\ &+f_{xy}(0,0)(x-0)(y-0)=\\ =& f(0,0)+f_x(0,0)\cdot x+f_y(0,0)\cdot y+\frac{f_{xx}(0,0)}{2}x^2+\frac{f_{yy}(0,0)}{2}y^2+f_{xy}(0,0)\cdot xy.\end{aligned}$$

Když si tedy napíšeme příslušné derivace, dostaneme

$$\begin{aligned}f(x,y)&=(1-\frac{x^3}{2}-\frac{y^3}{3})\mathrm{e}^{\frac{3}{4}x^2+y^2}\\ f_x(x,y)&=-\frac{3x^2}{2}\mathrm{e}^{\frac{3}{4}x^2+y^2}+\frac{3}{2}x(1-\frac{x^3}{2}-\frac{y^3}{3})\mathrm{e}^{\frac{3}{4}x^2+y^2}\\ f_y(x,y)&=-y^2\mathrm{e}^{\frac{3}{4}x^2+y^2}+2y(1-\frac{x^3}{2}-\frac{y^3}{3})\mathrm{e}^{\frac{3}{4}x^2+y^2}\\ f_{xx}(x,y)&=[-(3x+\frac{9}{2}x^3)+(\frac{3}{2}+\frac{9}{4}x^2)(1-\frac{x^3}{2}-\frac{y^3}{3})]\mathrm{e}^{\frac{3}{4}x^2+y^2}\\ f_{xy}(x,y)&=[-3x^2y-\frac{3}{2}xy^2+3xy(1-\frac{x^3}{2}-\frac{y^3}{3})]\mathrm{e}^{\frac{3}{4}x^2+y^2}\\ f_{yy}(x,y)&=[-(2y+4y^3)+(2+4y^2)(1-\frac{x^3}{2}-\frac{y^3}{3})]\mathrm{e}^{\frac{3}{4}x^2+y^2}.\end{aligned}$$

Teď, když si dosadíme funkční hodnoty těchto derivací v bodě $(0,0)$, tak dostaneme

$$\begin{aligned}f(0,0)&=(1-\frac{0^3}{2}-\frac{0^3}{3})\mathrm{e}^{\frac{3}{4}\cdot 0^2+0^2}=1\\ f_x(0,0)&=-\frac{3\cdot 0^2}{2}\mathrm{e}^{\frac{3}{4}\cdot 0^2+0^2}+\frac{3}{2}\cdot 0(1-\frac{0^3}{2}-\frac{0^3}{3})\mathrm{e}^{\frac{3}{4}\cdot 0^2+0^2}=0\\ f_y(0,0)&=-0^2\mathrm{e}^{\frac{3}{4}\cdot 0^2+0^2}+2\cdot 0(1-\frac{0^3}{2}-\frac{0^3}{3})\mathrm{e}^{\frac{3}{4}\cdot 0^2+0^2}=0\\ f_{xx}(0,0)&=[-(0+0)+(\frac{3}{2}+0)(1-\frac{0}{2}-\frac{0}{3})]\mathrm{e}^0=\frac{3}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{3}{2}\\ f_{xy}(0,0)&=[-0-0+0]\mathrm{e}^0=0\\ f_{yy}(0,0)&=[-(0+0)+(2+0)(1-\frac{0}{2}-\frac{0}{3})]\mathrm{e}^0=2\cdot 1\cdot 1=2.\end{aligned}$$

Když si tedy tyto spočtené hodnoty dosadíme do obecného vzorce, dostaneme

$$T_2(x,y)=1+\frac{3}{4}x^2+y^2,$$

takže, podle věty 14 platí

$$f(x,y)-f(0,0)=f(x,y)-1=\frac{3}{4}x^2+y^2+\omega(x,y)(x^2+y^2),\ \text{kde}\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\omega(x,y)=0.$$

Odtud $(\frac{3}{4}x^2+y^2\geq\frac{1}{4}\cdot(x^2+y^2))$ :

$$f(x,y)-f(0,0)\geq\left(\frac{1}{4}+\omega(x,y)\right)(x^2+y^2),$$

takže $\exists P_{(0,0)}$ takové, že $\forall(x,y)\in P_{(0,0)}: f(x,y)-f(0,0)>0$, což znamená, že $f$ má v bodě $(0,0)$ ostré lokální minimum.

*Poznámka.* Na základě zpřesnění a zobecnění úvah pomocí kterých jsme vyřešili předchozí příklad lze vyslovit následující tvrzení (viz. [15]).

**Věta 16.** *Nechť* $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *a nechť* $f \in C^3(U_a)$. *Nechť* $f_x(a) = f_y(a) = 0$. *Pak platí:*

(1) Když $f_{xx}(a) < 0$ a $f_{xx}(a)f_{yy}(a) - f_{xy}^2(a) > 0$, pak funkce $f$ má v bodě $a$ ostré lokální maximum.
(2) Když $f_{xx}(a) > 0$ a $f_{xx}(a)f_{yy}(a) - f_{xy}^2(a) > 0$, pak funkce $f$ má v bodě $a$ ostré lokální minimum.
(3) Když $f_{xx}(a)f_{yy}(a) - f_{xy}^2(a) < 0$, pak funkce $f$ nemá v bodě $a$ lokální extrém.

# 8. Závěr

V této práci jsem se zabýval problematikou Taylorova polynomu. Taylorův polynom je často využívanou metodou pro lokální aproximaci funkce. Nejprve jsem se snažil podrobně rozebrat poznatky o Taylorově polynomu jedné reálné proměnné. Také jsem se věnoval několika způsobům, jakými uvést zbytek v Taylorově větě. Poté jsem vyřešil několik příkladů a uvedl aplikace Taylorova polynomu jedné reálné proměnné. Na to jsem navázal zavedením Taylorova polynomu pro funkce více proměnných, ukázal na souvislost s Taylorovou větou pro funkci jedné proměnné a uvedl ukázky jeho aplikací. Na přiloženém CD-ROM lze nalézt ukázky pro grafickou ilustraci vytvořené v programu Maple.

# Literatura


[1] The Ipe extensible drawing editor. The Ipe extensible drawing editor [online]. Dostupné z: http://ipe.otfried.org/

[2] Pelantová, Edita. Aproximace funkcí polynomy [online]. , 1-13 [cit. 2017-04-21]. Dostupné z: http://people.fjfi.cvut.cz/pelanedi/taylorN.pdf

[3] Colin Maclaurin | Scottish mathematician | Britannica.com. Encyclopedia Britannica | Britannica.com [online]. Copyright ©2017 Encyclop [cit. 18.04.2017]. Dostupné z: https://www.britannica.com/biography/Colin-Maclaurin

[4] James Gregory | Scottish mathematician and astronomer | Britannica.com. Encyclopedia Britannica | Britannica.com [online]. Copyright ©2017 Encyclop [cit. 18.04.2017]. Dostupné z: https://www.britannica.com/biography/James-Gregory

[5] Brook Taylor | British mathematician | Britannica.com. Encyclopedia Britannica | Britannica.com [online]. Copyright ©2017 Encyclop [cit. 18.04.2017]. Dostupné z: https://www.britannica.com/biography/Brook-Taylor

[6] Joseph-Louis Lagrange, comte de l'Empire | French mathematician | Britannica.com. Encyclopedia Britannica | Britannica.com [online]. Copyright ©2017 Encyclop [cit. 18.04.2017]. Dostupné z: https://www.britannica.com/biography/Joseph-Louis-Lagrange-comte-de-lEmpire

[7] Gregory biography. MacTutor History of Mathematics [online]. Dostupné z: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Gregory.html

[8] Maclaurin biography. MacTutor History of Mathematics [online]. Dostupné z: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Maclaurin.html

[9] Taylor biography. MacTutor History of Mathematics [online]. Dostupné z: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Taylor.html

[10] Lagrange biography. MacTutor History of Mathematics [online]. Dostupné z: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lagrange.html

[11] Theuer, Matyáš. Taylor vs. l'Hospital stylem KO [online]. 2011, , 1-7 [cit. 2017-04-20]. Dostupné z: http://homel.vsb.cz/~vod03/osma/pdf/prednasky/2011/Taylor.pdf

[12] JARNÍK, Vojtěch. Diferenciální počet I. 6. nezměněné vydání. Praha: Academia nakladatelství, 1974. ISBN 21-101-74.

[13] JARNÍK, Vojtěch. Diferenciální počet II. 4. vydání. Praha: Academia nakladatelství, 1984. ISBN 21-017-84.

[14] RUDIN, Walter. Podstawy analizy matematycznej. Wydanie czwarte. Warszawa: Wydawnictwo Naukove PWN sp. z o.o., 1996.ISBN 83-01-02846-7.

[15] KUBEN, Jaromír, MAYEROVÁ, Šárka, RAČKOVÁ, Pavlína, ŠARMANOVÁ, Petra. Diferenciální počet funkcí více proměnných.1.vydání.2012. ISBN 9788024813042

[16] Tayloruv polynom. Kiwi.mendelu.cz [online]. Copyright © 2007 [cit. 21.04.2017]. Dostupné z: http://user.mendelu.cz/marik/mat-web/mat-webse4.html